AFFINE DESARGUESSCHE BARBILIANRÄUME

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

KLAUS WOLF

aus Essen

Bochum 1981

AFFINE DESARGUESSCHE BARBILIANRÄUME

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

KLAUS WOLF

aus Essen

Bochum 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	I
1. Affine Barbilianstrukturen	1
2. Affine Barbilianräume	1o
3. Affine Translations - Barbilianräume	16
4. Affine Desarguessche Barbilianräume	41
5. Zusammenhang zwischen speziellen algebraischen und geometrischen Eigenschaften Affiner Desarguesscher Barbilianräume	63
Literaturverzeichnis	68

Einleitung

Ist $\mathcal{P}$ eine beliebige Menge von Punkten, $\mathcal{G}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von $\mathcal{P}$, deren Elemente wir Geraden nennen, und sind $\not\sim$ ("nicht-benachbart") bzw. $\parallel$ ("parallel") zwei binäre Relationen auf $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, so wollen wir diese affine geometrische Struktur mit $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\sim, \parallel]$ bezeichnen.

Nun läßt sich aber jedem Ring R mit Hilfe eines rechten R-Moduls M_R und einer beliebigen nichtleeren Teilmenge B von M_R, die nicht die Null enthält, folgendermaßen eine solche affine Geometrie $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\sim, \parallel]$ zuordnen:

Wir nennen die Elemente von $\mathcal{P} := M_R$ Punkte und die von $\mathcal{G} := \{G_a^u := a + uR \mid a \in M_R, u \in B\}$ Geraden.
Ein Punkt p heiße genau dann nicht-benachbart zu q (in Zeichen $p \not\sim q$), wenn $p - q \in B$,
und zwei Geraden G_a^u und G_b^v seien genau dann parallel (in Zeichen $G_a^u \parallel G_b^v$), wenn $uR = vR$ gilt.

Wir werden diese affinen Geometrien $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\sim, \parallel]$ mit $\mathrm{Aff}(M_R, B)$ bezeichnen.

In dieser Arbeit wollen wir uns nun mit affinen Geometrien $\mathrm{Aff}(M_R,B)$ beschäftigen, bei denen M_R ein freier rechter R-Modul über einem beliebigen Ring R mit Einselement ist und B ein Barbilianbereich [1], d.h. eine nichtleere Teilmenge von M_R, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(B_1) Jedes $u \in B$ gehört zu einer Basis von M_R, die ganz in B enthalten ist und mindestens zwei Elemente hat.

(B_2) $\sum_{i \in I-\{j\}} (u_i R) - u_j \subset B$, wenn $\{u_i \mid i \in I\}$ eine Basis von M_R ist, die ganz in B enthalten ist.

Ziel dieser Arbeit ist es, diese oben lediglich algebraisch definierten Geometrien $\mathrm{Aff}(M_R,B)$ geometrisch zu charakterisieren.

In den ersten beiden Paragraphen werden wir uns hauptsächlich um die Einführung von Definitionen und Axiomen und die daraus resultierenden geometrischen Eigenschaften bemühen. Wir werden dann aber in Paragraph 3 als Zwischenstufe

---

1) Die hier gegebene Definition des Barbilianbereichs stimmt für $M_R = R \times R$ mit den von W. Leißner in [13] und [15] gegebenen überein, wenn man $(1,0) \in B$ verlangt.

einen ersten Strukturatz formulieren, der eine Aussage über die Klasse der affinen Geometrien $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|] = \mathrm{Aff}[(A,+), B, \Psi]$ macht, für die $\mathcal{P} = (A,+)$ eine abelsche Gruppe, B eine nichtleere Teilmenge von $(A,+)$, Ψ eine Abbildung von B in die Menge aller Untergruppen von $(A,+)$ und $\mathcal{G} = \{a + \Psi(u) \mid a \in A, u \in B\}$ ist. B und Ψ erfüllen gewisse Bedingungen (Ψ_1) und (Ψ_2).
Die entscheidende Rolle spielt dabei die zu $\mathcal{P}$ isomorphe Translationsgruppe dieser Geometrien.

In Paragraph 4 schließlich definieren wir durch das Hinzufügen eines weiteren Axioms die Affinen Desarguesschen Barbilianräume und erhalten damit die gewünschte geometrische Charakterisierung der Strukturen $\mathrm{Aff}(M_R, B)$. Die abelsche Gruppe $(A,+)$ läßt sich jetzt mit Hilfe des Ringes R der zentrischen Streckungen als freier Modul M_R darstellen, und $(\Psi_1), (\Psi_2)$ sind gleichbedeutend mit $(B_1), (B_2)$, B wird damit Barbilianbereich von M_R.

Im letzten Paragraphen werden dann noch einige Sätze zusammengefaßt, die einen Zusammenhang zwischen speziellen algebraischen und geometrischen Eigenschaften von $\mathrm{Aff}(M_R, B)$ herstellen.

Nun ist zu bemerken, daß wir uns durch die Festlegung der Menge B als Barbilianbereich von den Ringgeometrien, die von H.J. Arnold in [1] untersucht worden sind, entfernt haben. Dort ist $B = M_R - \{0\}$, d.h. die Geradenmenge besteht aus den Nebenklassen der zyklischen Untermoduln aR , $a \in M_R - \{0\}$, und die Relation "nicht-benachbart" ist gleichbedeutend mit "verschieden".

Wir haben so allerdings die Möglichkeit, die Geometrien, bei denen durch zwei nicht-benachbarte Punkte genau eine Gerade verläuft [1], mit Hilfe der 1-endlichen Ringe [2] algebraisch zu charakterisieren. Bei H.J. Arnold haben nur die Körpergeometrien diese Eigenschaft, da bei ihm zwei Punkte bereits nicht-benachbart sind, wenn sie verschieden sind.

- - -

1) Dies gilt u.a. für die Ringgeometrien von J. Hjelmslev ([7], [8]), W. Klingenberg ([9], [10], [11]), W. Benz ([3]) und W. Leißner ([13]).

   Arnold fordert, wie auch wir zunächst (siehe S. 2), ein schwächeres Axiom: Durch zwei nicht-benachbarte (bei Arnold: verschiedene) Punkte soll mindestens eine Gerade verlaufen.

2) (siehe P.M. Cohn [6]) d.h. der Ringe R mit Einselement, in denen $\alpha \cdot \beta = 1 \iff \beta \cdot \alpha = 1$ für $\alpha, \beta \in R$ ist. Bei D. Barbilian ([2]) werden diese Ringe als Z-Ringe bezeichnet.

Weiterhin ist jeder Barbilianbereich B eines freien rechten R-Moduls M_R enthalten in einem maximalen Barbilianbereich

$$B_{max} := \{ u \in M_R \mid u \text{ kann zu einer Basis von } M_R \text{ ergänzt werden, die mindestens 2 Elemente enthält.} \},$$

wobei es jedoch, wie W. Leißner in [15] gezeigt hat, freie rechte R-Module gibt, die einen Barbilianbereich $B \neq B_{max}$ enthalten [1].

Damit beinhaltet die von uns betrachtete Klasse von affinen Geometrien u.a. folgende Geometrien $Aff(M_R,B)$, für die jeweils $M_R = R \times R$ und $B = B_{max}$ gilt:

R ist ein Körper:
Nun sind zwei Punkte wegen $B_{max} = M_R - \{0\}$ genau dann nichtbenachbart, wenn sie verschieden sind, und $Aff(M_R,B)$ ist Desarguessche oder Pappussche Affine Ebene. (Für $M_R = R^n$

- - -

1) Leißner zeigt dort, daß die Menge aller Zeilen von Matrizen aus $GE_2(R)$, wobei $GE_2(R)$ die Gruppe ist, die von allen Elementar- und Diagonal-2x2-Matrizen erzeugt wird, einen minimalen Barbilianbereich B_{min} von R^2 darstellt.
Dagegen besteht B_{max} aus allen Zeilen von Matrizen aus $GL_2(R)$, und es ergibt sich nun
$$B_{min} = B_{max} \iff GE_2(R) = GL_2(R) .$$
Nun zeigt aber P.M. Cohn in [5] , daß $GE_2(R) \neq GL_2(R)$ für den Hauptidealring der ganzen Zahlen in $Q(\sqrt{-19})$ ist.

erhält man die Desarguesschen oder Pappusschen Affinen Räume, die ebenfalls in unserer Klasse von affinen Geometrien enthalten sind.)

R ist der klassische Ring der dualen Zahlen:
Damit wird $Aff(M_R,B)$ eine Hjelmslev-Geometrie ([7],[8]).

R ist ein Hjelmslevring [1]:
Dann ergibt $Aff(M_R,B)$ die von W. Klingenberg ([9],[10], [11]) untersuchten Geometrien.

R ist ein kommutativer Ring:
Wir erhalten in diesem Fall die von W. Benz ([3]) untersuchten Geometrien.

Darüberhinaus fallen in unsere Klasse nun auch die ebenen affinen Geometrien $Aff(M_R,B)$, für die $M_R = R \times R$, R ein 1-endlicher Ring und B ein beliebiger Barbilianbereich ist. Diese ebenen Geometrien umfassen ja ihrerseits bereits

- - -

1) ein nicht notwendig kommutativer Ring mit Einselement, in dem alle Nichtnullteiler ein Inverses besitzen. Alle Nullteiler sind Rechts- und Linksnullteiler und bilden ein zweiseitiges Ideal; von je zwei Nullteilern ist wenigstens einer Rechtsvielfaches des anderen und wenigstens einer Linksvielfaches des anderen.

sämtliche oben angegebenen (ebenen) Geometrien.
Sie werden von W. Leißner in [13] und [15] als Affine Barbilian-Ebenen bezeichnet und bildeten den Ausgangspunkt für unsere Erweiterung auf beliebig dimensionale Ringgeometrien.

Für die Anregung zu meiner Arbeit und darüberhinaus für viele Hinweise und sonstige Unterstützung bin ich Herrn Prof.Dr. Werner Leißner sehr zu Dank verpflichtet.

1. Affine Barbilianstrukturen

Vorgegeben sei eine abstrakte Menge $\mathcal{P} = \{a,b,c,\ldots\}$,
deren Elemente Punkte genannt werden,
und eine nichtleere Menge $\mathcal{G} = \{A,B,C,\ldots\}$ von nichtleeren Teilmengen von $\mathcal{P}$, die Geraden .

Auf $\mathcal{P}$ sei eine zweistellige, antireflexive Relation
" nicht-benachbart " gegeben
und auf $\mathcal{G}$ eine Äquivalenzrelation " parallel " .

Sind die Punkte p und q nicht- benachbart, so
schreiben wir : $p \not\sim q$.
Die Parallelität zweier Geraden G und H beschreiben
wir durch : $G \parallel H$.

Wir nennen einen Punkt p aus $G \cap H$ einen Schnittpunkt von G und H und sagen, G schneidet H in p .

Ist z ein Punkt und G eine Gerade, so sei

$\langle z \rangle := \{H \in \mathcal{G} \mid z \in H\}$ das Geradenbüschel durch z

und

$[\![G]\!] := \{H \in \mathcal{G} \mid H \parallel G\}$ das Parallelbüschel zu G .

Wir wollen nun $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ eine

Affine Barbilianstruktur (ABS) nennen, wenn

folgende Axiome gelten:

(A_1)(a) Sind p und q zwei nicht-benachbarte Punkte, so gibt es mindestens eine Gerade, die p und q enthält.

(b) Der Durchschnitt aller Geraden durch zwei nicht-benachbarte Punkte $p \neq q$ ist ebenfalls eine (mit $\overline{pq}$ bezeichnete) Gerade.

(A_2) Zu jedem Punkt p einer Geraden G gibt es einen Punkt q , so daß $p \neq q$ und $G = \overline{pq}$.

(A_3) (Euklidisches Parallelenaxiom) Zu beliebig vorgegebenem $(p,G) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ existiert stets genau eine (mit $(p \| G)$ bezeichnete) Gerade H , die $p \in H$ und $H \| G$ genügt.

Bemerkung:

Die oben angegebene Version von (A_1) wird in ähnlicher Weise auch von H.J. Arnold ([1]) und F. Radó ([16]) gefordert. Die von W. Leißner in [13] benutzte stärkere Version:

(A_1'') Durch zwei nicht-benachbarte Punkte geht genau eine Gerade.

führt, wie noch gezeigt wird, zu einer Geometrie über einem 1-endlichen Ring (siehe S. IV Fußnote 2)).

Aus (A_1) und (A_2) erhalten wir nun sofort folgende Darstellung der Geradenmenge

$$(1.1) \qquad \mathcal{G} = \{\overline{pq} \mid p \neq q\,,\ p,q \in \mathcal{P}\} \quad .$$

Es folgen jetzt einige Definitionen, die für die Charakterisierung unserer Geometrie von großer Bedeutung sind :

(1.2) Definition Teilraum

Eine Teilmenge T von $\mathcal{P}$ einer Affinen Barbilianstruktur $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \neq, \|]$ heißt Teilraum, wenn gilt :

(T_1) Mit zwei nicht-benachbarten Punkten $x \neq y$ aus T liegt auch die Gerade $\overline{xy}$ in T .

(T_2) Ist G eine Gerade und p ein Punkt in T , so liegt auch $(p \| G)$ in T .

Es ergibt sich nun ohne weiteres, daß das System aller Teilräume einer [illegible] ein Hüllensystem darstellt, denn der Durchschnitt von Teilräumen ist stets wieder ein Teilraum. Damit ergibt sich für jede Teilmenge S von $\mathcal{P}$

$$\overline{S} := \bigcap_{T \in S^*} T \quad ,$$

wobei S^* die Menge aller Teilräume bezeichnet, die S enthalten,

als der eindeutig definierte kleinste Teilraum, der S enthält. Man beachte dabei, daß zumindest $\mathcal{P} \in S^*$.

(1.3) Definition Automorphismus

Ein Automorphismus einer ABS $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ ist eine Bijektion α von $\mathcal{P}$, die für alle $p,q \in \mathcal{P}$, $S \subset \mathcal{P}$ und $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ erfüllt:

(1) $p \neq q \iff p^\alpha \neq q^\alpha$

(2) $S \in \mathcal{G} \iff S^\alpha \in \mathcal{G}$

(3) $G_1 \| G_2 \iff G_1^\alpha \| G_2^\alpha$.

Wir bezeichnen die Menge aller Automorphismen von $\mathcal{P}$, die eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe von $\mathcal{P}$ ist, mit $AUT[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$.

(1.4) Definition Dilatation

Eine Abbildung δ von $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}$ nennen wir Dilatation, wenn aus

$p \in (q \| G)$ auch $p^\delta \in (q^\delta \| G)$

für alle $p,q \in \mathcal{P}$ und $G \in \mathcal{G}$ folgt .

Eine $\langle p \rangle$ -Dilatation genügt zusätzlich der Bedingung $p^\delta = p$ für den Punkt p .

(1.5) Definition Spur-Translation , Translation

Eine Dilatation $\tau \in AUT[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ heiße Spur-Translation oder genauer $[\![G]\!]$ -Translation, wenn eine Gerade G existiert, so daß

$$H^\tau = H \quad \text{für alle} \quad H \in [\![G]\!] \quad .$$

Die Untergruppe von $AUT[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$, die von allen diesen Spur-Translationen erzeugt wird, nennt man Translationsgruppe von $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ und bezeichnet

sie mit $T\left[P, \mathcal{G}, \not\in, \parallel\right]$. Wir nennen ihre Elemente die Translationen .

(1.6) Definition Kreuzgeradenmenge , Kreuzgerade

Wir nennen die Menge von Geraden $K := \{G_i \mid i \in I\}$ mit $|I| \geq 2$ einer ABS Kreuzgeradenmenge, wenn für beliebige Punkte $p \neq q$ die folgenden Eigenschaften gelten :

(K_1) Die Gerade $(p \parallel G_{i_o})$ hat für jedes $i_o \in I$ mit der sog. Hyperebene

$$H(q,i_o) := \overline{\bigcap_{j \in I-\{i_o\}} (q \parallel G_j)}$$

einen nichtleeren Durchschnitt.

(K_2) $\bigcap_{i \in I} H(q,i) = \{q\}$.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß ebenso $\{(p_i \parallel G_i) \mid i \in I\}$ eine Kreuzgeradenmenge darstellt, wenn die p_i beliebig gewählte Punkte sind.

Weiterhin bezeichnen wir zwei Geraden G_1 und G_2 als Kreuzgeraden, kurz $G_1 \textcircled{\scriptsize X} G_2$, wenn es eine Kreuzgeradenmenge gibt, die G_1 und G_2 enthält.

Nun wollen wir einige Eigenschaften einer ABS mit der Kreuzgeradenmenge $K := \{G_i \mid i \in I\}$ zusammenstellen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir :

(1.7) Definition Unterraum

$$U(p,J) := \{p\} \cup \overline{\bigcup_{j \in J} (p \| G_j)}$$

für beliebige $p \in \mathcal{P}$ und $J \subset I$

als einen Unterraum, also einen Teilraum von $\mathcal{P}$, der von p und Kreuzgeraden durch p aufgespannt wird.

Wir wollen jetzt zeigen, daß man jeden Unterraum darstellen kann als Vereinigung von endlich erzeugten Unterräumen. Setzt man nämlich

$$(1.8) \quad J^* := \{E \subset J \mid |E| \text{ ist endlich}\}$$

als die Menge aller endlichen Teilmengen von $J \subset I$, so läßt sich zeigen

$$(1.9) \quad U(p,J) = \bigcup_{E \in J^*} U(p,E) \quad ,$$

denn $\bigcup_{E \in J^*} U(p,E)$ ist ein Teilraum von $U(p,J)$, der auch alle Geraden $(p \| G_j)$, $j \in J$, enthält. Da $U(p,J)$ nun aber der kleinste Teilraum ist, der dies erfüllt, folgt die Gleichheit (1.9).

Beachtet man nun, daß sich mit Hilfe von (K_1) ergibt, daß der Unterraum, der von der ganzen Kreuzgeradenmenge K aufgespannt wird, schon sämtliche Punkte enthält, also $\mathcal{P} = U(p,I)$ ist, so erhält man als Spezialfall von (1.9)

$$(1.10) \quad \mathcal{P} = \bigcup_{E \in I^*} U(p,E) \quad .$$

Wir zeigen nun erst einmal für endliche Mengen $E \subset I$

(1.11) Zu jedem Punkt $p_o \in U(q,E)$, wobei $E = \{i_o,\dots,i_n\} \in I^*$ und $|E| = n$ ist, gibt es eine Folge von n Punkten $p_1,\dots,p_n \in U(q,E)$, die $p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu})$ für $\nu = 1,\dots,n$ und $p_n = q$ erfüllen.

Man kann also p_o mit q durch Kreuzgeraden verbinden : Nach (K_1) können wir einen Punkt $p_1 \in (p_o \| G_{i_1}) \cap H(q,i_1)$ wählen. Da aber $p_1 \in H(q,i_1)$ und $(q \| G_{i_2}) \subset H(q,i_1)$, gilt auch $(p_1 \| G_{i_2}) \subset H(q,i_1)$.

Wählen wir nun weiter $p_2 \in (p_1 \| G_{i_2}) \cap H(q,i_2)$, so gilt $p_2 \in H(q,i_1) \cap H(q,i_2)$ und damit auch $(p_2 \| G_{i_3}) \subset H(q,i_1) \cap H(q,i_2)$.

Ebenso folgt für einen Punkt $p_3 \in (p_2 \| G_{i_3}) \cap H(q,i_3)$, daß $p_3 \in H(q,i_1) \cap H(q,i_2) \cap H(q,i_3)$.

Setzen wir dies fort, so erhalten wir schließlich

$$(*) \qquad p_n \in \bigcap_{\nu=1}^{n} H(q,i_\nu) \ .$$

Außerdem können wir aus $p_{\nu-1} \in U(q,E)$ für ein $\nu \in \{1,\dots,n\}$ über $(p_{\nu-1} \| G_{i_\nu}) \subset U(q,E)$ auch folgern, daß $p_\nu \in U(q,E)$, da ja $p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu})$. Nun ist $p_o \in U(q,E)$, also auch $p_1,\dots,p_n \in U(q,E)$ und somit wegen $U(q,E) \subset H(q,i)$ für alle $i \in I - E$

$$p_n \in H(q,i) \text{ für alle } i \in I - E \ .$$

Zusammen mit $(*)$ erhalten wir jetzt unter Beachtung

von (K_2)

$$p_n \in \bigcap_{i \in I} H(q,i) = \{q\} ,$$

was $p_n = q$ bedeutet .

Da wir aber nach (1.9) jeden Unterraum als eine Vereinigung von endlich erzeugten Unterräumen schreiben können, ergibt sich mit (1.11) sofort :

(1.12) Zu jedem Punkt $p_o \in U(q,J)$, $q \in \mathcal{P}$, $J \subset I$, gibt es eine endliche Folge von Indizes $i_1,\dots,i_n \in J$ und Punkten $p_1,\dots,p_n \in U(q,J)$, die für $\nu = 1,\dots,n$ $p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu})$ und $p_n = q$ erfüllen.

Ist nun $p_o \in U(q,J)$ für feste $p_o,q \in \mathcal{P}$, $J \subset I$, so erhalten wir sofort $U(p_o,J) \subset U(q,J)$ und mit Hilfe der nach (1.12) existierenden Verbindung von p_o und q über Punkte $p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu}) \subset U(p_o,J)$ für $\nu=1,\dots,n$ sogar , daß $p_n = q \in U(p_o,J)$ und damit auch $U(q,J) \subset U(p_o,J)$, zusammen also

(1.13) $U(q,J) = U(p_o,J)$ für beliebige $p_o \in U(q,J)$.

Dies bedeutet, wenn man beachtet, daß nach Definition (1.7) für $U(q,J)$ stets $q \in U(q,J)$, auch wenn $J = \{\}$,

(1.14) Für ein Beliebiges, aber festes $J \subset I$ bildet die Familie von Unterräumen $\{U(x,J) \mid x \in \mathcal{P}\}$ eine Partition auf $\mathcal{P}$, die $x \in U(x,J)$ für alle $x \in \mathcal{P}$ genügt.

Schließlich wollen wir nun zeigen

(1.15) $\left|(p \parallel G_i) \cap U(q,J)\right| \leq 1$ für alle $p,q \in \mathcal{P}$ und $i \in I - J$.

Sei deshalb $i \in I - J$ und $d,d' \in (p \parallel G_i) \cap U(q,J)$.

Aus $d,d' \in U(q,J) \subset U(q,I-\{i\}) = H(q,i)$

folgt mit (1.13)

$d' \in H(d',i) = H(q,i) = H(d,i)$

und für alle $j \neq i$ $\quad d' \in (p \parallel G_i) = (d \parallel G_i) \subset H(d,j)$,

zusammen also mit (K_2)

$$d' \in \bigcap_{i \in I} H(d,i) = \{d\} .$$

Als Spezialfall von (1.15) können wir jetzt unter Beachtung von (K_1) festhalten :

(1.16) Die Gerade $(p \parallel G_{i_o})$ hat für jedes $i_o \in I$ mit der Hyperebene $H(q,i_o)$ genau einen Punkt gemeinsam .

2. Affine Barbilianräume

Eine Affine Barbilianstruktur $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\in, \parallel]$ wird Affiner Barbilianraum (ABR) genannt, wenn zusätzlich zu (A_1), (A_2) und (A_3) folgende Axiome gelten :

(A_4) Zu jeder Geraden existiert eine Kreuzgerade.

(A_5) Ist $p \not\in q$ und $\overline{pq} = G_j$ ein Element der Kreuzgeradenmenge $\{G_i \mid i \in I\}$, dann ist p zu jedem Punkt x der Hyperebene $H(q,j)$ nicht-benachbart und $\{\overline{px}\} \cup \{G_i \mid i \in I - \{j\}\}$ ist Kreuzgeradenmenge.

Nun ist zu bemerken, daß dies im Falle $x \in (q \parallel G_i)$, $i \neq j$, bedeutet : $p \not\in x$ und $\overline{px} \odot G_j$.
Es ergibt sich somit als wichtiger Spezialfall von (A_5)

(2.1) Ist $p \not\in q$ und $\overline{pq} = G_1 \odot G_2$, dann ist p zu jedem Punkt x der Geraden $(q \parallel G_2)$ nicht-benachbart und $\overline{px} \odot G_2$.

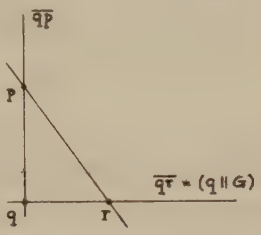
(A_5) entspricht also dem von W.Leißner in [13] für ebene Geometrien geforderten Axiom, denn dort besteht ja jede Kreuzgeradenmenge aus genau zwei Geraden .

Im folgenden sei $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\in, \parallel]$ nun ein ABR.

Da sich dadurch viele Vereinfachungen ergeben, zeigen wir als erstes analog wie F.Radó bei ebenen Geometrien ([16]):

(2.2) Die Relation nicht-benachbart ist symmetrisch.

Sei nämlich $p \not\sim q$ und G eine Kreuzgerade von $\overline{pq}$ gemäß (A_4), dann läßt sich $(q \parallel G)$ wegen (A_2) schreiben als $\overline{qr}$ mit $r \in \mathfrak{P}$ und $q \not\sim r$. Mit (A_5) bzw. (2.1) folgt nun $p \not\sim r$ und $\overline{pr} \odot (q \parallel G)$.



Erneute Anwendung von (2.1) ergibt wegen $q \not\sim r$ und $\overline{qr} = (q \parallel G) \odot \overline{pr}$, daß q zu jedem Punkt von $\overline{pr}$ nicht-benachbart ist, also auch $q \not\sim p$.

Sind G und G' zwei Kreuzgeraden, so wollen wir den Unterraum, der durch die Parallelen zu G und G' durch den Punkt p aufgespannt wird, Ebene nennen :

(2.3) Definition Ebene

$$E(p, G \odot G') := \overline{(p \parallel G) \cup (p \parallel G')}$$

Nun können wir zeigen :

(2.4) Sind p und q zwei beliebige Punkte der Ebene $E(r, G \odot G')$, $r \in \mathfrak{P}$, $G, G' \in \mathfrak{G}$, so haben die Geraden $(p \parallel G)$ und $(q \parallel G')$ genau einen Schnittpunkt.

Nach (1.15) gilt bereits $|(p \| G) \cap (q \| G')| \leq 1$ und mit (1.13) ergibt sich $E(r, G \odot G') = E(q, G \odot G')$.
Nun läßt sich wegen (1.11) p mit q durch eine Folge von Punkten p_1, p_2 mit $p_1 \in (p \| G)$, $p_2 \in (p_1 \| G')$ und $p_2 = q$ verbinden, woraus $p_1 \in (p \| G) \cap (q \| G')$ und damit auch $|(p \| G) \cap (q \| G')| \geq 1$ folgt.

Wir wollen noch zwei wichtige Aussagen über die Eindeutigkeit von Spur-Translationen und $\langle p \rangle$-Dilatationen, $p \in \mathcal{P}$, machen. Dazu benötigen wir

(2.5) Zu beliebigen $p, q \in \mathcal{P}$ und $G_o \in \mathcal{G}$ existiert eine endliche Punkt-Geraden-Folge

$$p =: p_o, G_{i_1}, p_1, G_{i_2}, p_2, \dots, G_{i_n}, p_n = q,$$

wobei

$$G_{i_\nu} \odot G_o \quad \text{und} \quad p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu}) \quad \text{für} \quad \nu = 1, \dots, n$$

gilt.

Zum Beweis wählen wir zu G_o eine nach (A_4) existierende Kreuzgeradenmenge $K := \{G_i \mid i \in I\}$ mit $o \in I$.
Nach (1.12) gibt es nun eine endliche Folge von Indizes $\{i_1, \dots, i_n\} =: E \subset I$ und Punkten $p_1, \dots, p_n$, die für $\nu = 1, \dots, n$ $p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu})$ und $p_n = q$ erfüllen.
Es ist also alles gezeigt, falls $o \notin E$. -

Ist jedoch $o \in E$, so wählen wir $i_n = o$ und (1.12) zeigt $p_{n-1} \in (q \| G_o)$. Wählen wir nun irgendeine Gerade

$G' \in K - \{G_o\}$, so finden wir nach (A_2) einen Punkt r mit $r \not\in p_{n-1}$ und $(p_{n-1} \| G') = \overline{p_{n-1}r}$.
Weiter folgt mit (2.1) $r \not= q$ und $\overline{rq} \odot G_o$,
d.h. die Punkt-Geraden-Folge

$p =: p_o , G_{i_1}, p_1, G_{i_2}, p_2, \cdots , p_{n-1}, \overline{p_{n-1}r}, r, \overline{rq}, q$
erfüllt unsere Bedingungen.

Jetzt läßt sich zeigen

(2.6) Zu zwei beliebigen Punkten p_o und q_o einer beliebigen Geraden G_o gibt es höchstens eine $[\![G_o]\!]$ - Translation τ , die $p_o^{\tau} = q_o$ erfüllt.

Sei dazu τ eine beliebige $[\![G_o]\!]$ - Translation mit $p_o^{\tau} = q_o$.
Für jedes $p \in \mathcal{P}$ wählen wir nach (2.5) eine Punkt-Geraden-Folge $p_o, G_{i_1}, p_1, \cdots , G_{i_n}, p_n = p$.
Wir definieren nun suksessive bei $\nu = 1$ beginnend unter Beachtung von (2.4)

$$\{q_\nu\} := (q_{\nu-1} \| G_{i_\nu}) \cap (p_\nu \| G_o) \quad .$$

Damit erhalten wir wieder schrittweise

$$p_\nu^{\tau} \in (p_{\nu-1}^{\tau} \| G_{i_\nu}) \cap (p_\nu \| G_o) = \{q_\nu\}$$

und so letztlich

$p^{\tau} = q_n$, was eindeutig bestimmt ist.

Für den Eindeutigkeitsbeweis der $\langle p_o \rangle$- Dilatationen benötigen wir noch

(2.7) Jede Dilatation δ genügt
$U(p_o, J)^{\delta} \subset U(p_o^{\delta}, J)$ für alle $p_o \in \mathcal{P}$ und $J \subset I$.

Zum Beweis seien $p_o \in \mathfrak{P}$, $J \subset I$ und $q \in U(p_o,J)$ beliebig vorgegeben. Wir betrachten nun eine nach (1.12) existierende endliche Punkt-Geraden-Folge

$p_o, G_{i_1}, p_1, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}, p_n=q$ mit $i_\nu \in J$ und
$p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu})$ für $\nu = 1,\dots,n$

und erhalten mit Hilfe von (1.13) suksessive

$$p_\nu^\delta \in (p_{\nu-1}^\delta \| G_{i_\nu}) \subset U(p_o^\delta,J) \quad \text{für} \quad \nu = 1,\dots,n ,$$

also auch $q^\delta = p_n^\delta \in U(p_o^\delta,J)$.

Jetzt sind wir in der Lage, folgenden wichtigen Satz zu beweisen :

(2.8) Zu drei beliebigen Punkten p_o , q_o , r_o mit $p_o \not= q_o$ gibt es höchstens eine Dilatation δ , die $p_o^\delta = p_o$ und $q_o^\delta = r_o$ genügt.

Dazu vervollständige man $\overline{p_o q_o} =: G_o$ unter Beachtung von (A_4) und (A_2) zu einer Kreuzgeradenmenge
$K := \{G_i \mid i \in I\} \subset \langle p_o \rangle$ mit $o \in I$.
Auf jeder Geraden G_i , $i \not= o$, wählen wir gemäß (A_2) einen Punkt $q_i \not= p_o$, so daß $G_i = \overline{p_o q_i}$.
Für $i \not= o$ ergibt sich nach (2.1) für $x \in \overline{p_o q_i}$, daß $q_o \not= x$ und $\overline{q_o x} \odot \overline{p_o q_i}$.
Damit aber erhalten wir, daß

$$x^\delta \in (q_o^\delta \| \overline{q_o x}) \cap (p_o^\delta \| \overline{p_o q_i}) = (r_o \| \overline{q_o x}) \cap \overline{p_o q_i}$$

wegen (2.4) eindeutig durch r_o und x bestimmt ist.

Ist nun $x \in \overline{p_o q_o}$, so ergibt sich die Eindeutigkeit

von x auf gleiche Weise, wenn wir ein beliebiges $i \in I-\{o\}$ wählen und das, wie soeben gezeigt, eindeutig bestimmte $q_i^{\delta} =: r_i$ benutzen.

Nun sei $p \in \mathfrak{P}$ beliebig vorgegeben.

Nach (1.16) ist $\{x_i\} := H(p,i) \cap \overline{P_o q_i}$ für alle $i \in I$ eindeutig bestimmt und mit (1.13) gilt

$$p \in \bigcap_{i \in I} H(p,i) = \bigcap_{i \in I} H(x_i,i) \; ;$$

schließlich folgt mit (2.7)

$$p^{\delta} \in \bigcap_{i \in I} H(x_i,i)^{\delta} \subset \bigcap_{i \in I} H(x_i^{\delta},i) \; ,$$

wobei die letzte Menge eindeutig bestimmt ist durch die eindeutig bestimmten Bilder der Punkte $x_i \in \overline{P_o q_i}$, $i \in I$.

So ergibt sich durch erneute Anwendung von (1.13) und unter Beachtung von (K_2) die Eindeutigkeit von p^{δ}:

$$\bigcap_{i \in I} H(x_i^{\delta},i) = \bigcap_{i \in I} H(p^{\delta},i) = \{p^{\delta}\} .$$

3. Affine Translations - Barbilianräume

Wir wollen in diesem Abschnitt Affine Barbilianräume betrachten, in denen ein zusätzliches Axiom, das sogenannte Kleine Axiom von Desargues, gilt :

(A_6) Sind p_0 , q_0 zwei Punkte einer Geraden G_0 , n eine beliebige natürliche Zahl und gibt es für alle $\nu \in \{1,\dots,n\}$ Punkte p_ν , q_ν und Geraden G_ν , H_ν , so daß

$$(1)\quad G_\nu \in [\![G_0]\!]$$

$$(2)\quad \{p_\nu\} = (p_{\nu-1} \| H_\nu) \cap G_\nu$$

$$(3)\quad \{q_\nu\} = (q_{\nu-1} \| H_\nu) \cap G_\nu \quad ,$$

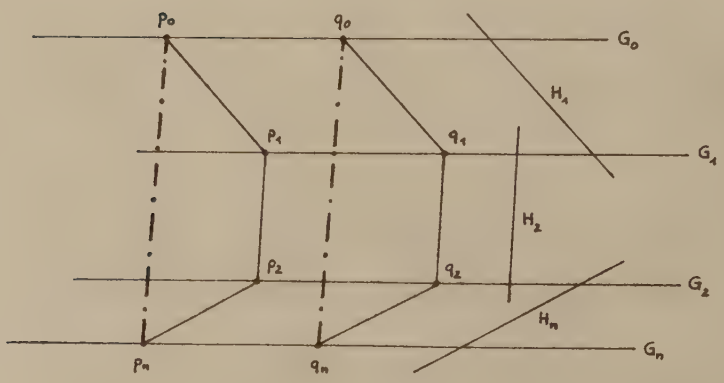
so gilt

$$p_n \neq p_0 \iff q_n \neq q_0$$

und

$$p_0 \in (p_n \| G) \iff q_0 \in (q_n \| G)$$

für alle Geraden G .



Wir nennen einen ABR , in dem (A_6) gilt, Affinen Translations - Barbilianraum (ATBR) .
Erfüllen zwei Punktfolgen $P_0, \dots, P_n$ und $q_0, \dots, q_n$ die Bedingungen (1), (2) und (3) von (A_6) , so wollen wir sie $[G_d]$- Parallelodrom nennen.

Ziel dieses Paragraphen ist es nun, die Übereinstimmung der Affinen Translations - Barbilianräume mit den folgenden affinen Geometrien aufzuweisen [1] :

Definition Aff $[(A,+),B,\Psi]$

Sei $(A,+)$ eine abelsche Gruppe, B eine Teilmenge von A und

$$\Psi : \quad u \in B \longrightarrow \Psi(u) =: \overline{Ou}$$

eine Abbildung von B in die Menge aller echten Unter-

---

1) Bemerkung : Für eine abelsche Gruppe $(A,+)$ wollen wir wie üblich A genau dann als (direkte) Summe der Untergruppen U_i , $i \in I$, bezeichnen, wenn es zu jedem $a \in A-\{0\}$ eine (eindeutige) endliche Teilmenge $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ und (eindeutige) Elemente $u_{i_\nu} \in U_{i_\nu}-\{0\}$ für $\nu = 1,\dots,n$ gibt, so daß $a = u_{i_1} + \dots + u_{i_n}$.

Wir schreiben nun $A = \sum_{i \in I} U_i$,

falls A Summe der U_i ist ,

und $A = \sum\!\!\!\!\!\!\oplus_{i \in I} U_i$,

falls diese Summe sogar direkt ist.

gruppen von A, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt werden :

(Ψ_1) Jedes $u \in B$ ist Element einer Generatormenge, d.h. einer Menge $B' \subset B$, die mindestens 2 Elemente hat und $A = \sum_{v \in B'}^{\oplus} \overline{Ov}$ und für alle $u \in B$ und $B^* \subset B'$

$$u \in \sum_{v \in B^*}^{\oplus} \overline{Ov} \iff \Psi(u) \subset \sum_{v \in B^*}^{\oplus} \overline{Ov}$$

genügt.

(Ψ_2) Ist $B' := \{u_i \mid i \in I\}$ eine Generatormenge, so gilt für jedes $u^* \in (\sum_{i \in I-\{j\}}^{\oplus} \overline{Ou_i} - u_j)$:

$u^* \in B$ und $\{u^*\} \cup \{u_i \mid i \in I-\{j\}$ ist Generatormenge.

Definiert man nun

$$\mathcal{G} := \{a + \overline{Ou} \mid a \in A, u \in B\} ,$$

$$a + \overline{Ou} \parallel b + \overline{Ov} \iff \overline{Ou} = \overline{Ov} \quad \text{und}$$

$$a \not\parallel b \iff a - b \in B ,$$

so sollen diese Strukturen $[A, \mathcal{G}, \not\parallel, \parallel]$ mit Aff $[(A,+), B, \Psi]$ bezeichnet werden.

Zunächst zeigen wir im folgenden in mehreren Schritten

(3.1) Satz

Jeder ATBR $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\in, \|]$ läßt sich darstellen als Aff $[(\mathcal{P},+), B, \Psi]$.

Hierbei ist für einen beliebigen Punkt $0 \in \mathcal{P}$

$B := \{u \in \mathcal{P} \mid u \not\in 0\}$ und $\Psi(u) := \overline{0u}$ für alle $u \in B$.

Nun gibt es für jedes $a \in \mathcal{P}$ genau eine Translation $\tau(a)$, die 0 auf a abbildet,

und mit Hilfe von $x + a := x^{\tau(a)}$

für alle $x, a \in \mathcal{P}$ wird $(\mathcal{P},+)$ zu einer abelschen Gruppe, wobei die $\Psi(u)$, $u \in B$, Untergruppen von $(\mathcal{P},+)$ sind und die Bedingungen (Ψ_1) und (Ψ_2) erfüllt werden.

Wir beginnen mit einer nun gültigen Verschärfung von (2.6)

(3.1.1) Zu zwei beliebigen Punkten p_o und q_o einer beliebigen Geraden G_o gibt es genau eine $[\![G_o]\!]$ - Translation τ , die $p_o^{\tau} = q_o$ erfüllt.

Beweis: Nach (2.6) reicht es, wenn wir die Existenz einer solchen Translation zeigen können:

Dazu sei $p \in \mathcal{P}$ ein beliebig gewählter Punkt und $p_o', p_1, \dots, p_n = p$ eine nach (2.5) existierende Punkt-Geraden-Folge mit Geraden $G_{i_\nu} \ni G_o$ und $p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu})$.

Angefangen bei $\nu = 1$ konstruieren wir nun mit Hilfe von (2.4) schrittweise eine Folge von Punkten $q_1, q_2, \dots, q_n$ durch

$$\{q_\nu\} := (q_{\nu-1} \| G_{i_\nu}) \cap (p_\nu \| G_o) \ ,$$

denn es gilt jeweils

$$(q_{\nu-1} \| G_{i_\nu}) \ , \ (p_\nu \| G_o) \ \subset \ \mathbb{E}(p_{\nu-1}, G_{i_\nu} \ni G_o) \ .$$

Wir definieren nun eine Abbildung $\tau(p_o, q_o)$ durch

$$p^{\tau(p_o,q_o)} = p_n^{\tau(p_o,q_o)} := q_n$$

und haben als erstes zu zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Punktfolge $p_o, \dots, p_n$ und der Geraden G_{i_ν} ist :

Ist aber $p_o, p_1', \dots, p_m'$ und $G_{i_\mu}' \ni G_o$ eine weitere Folge dieser Art und ist $q_1', q_2', \dots, q_m'$ die entsprechende schrittweise konstruierte Punktfolge, so bilden

$$p = p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_o, p_1', \dots, p_m' = p \quad \text{und}$$

$$q_n, q_{n-1}, \dots, q_1, q_o, q_1', \dots, q_m'$$

ein $[\![G_o]\!]$ - Parallelodrom , und es folgt mit (A_6)

$$q_n \in (q'_m \| G) \quad \text{für alle} \quad G \in \mathfrak{G} \ .$$

Somit aber ist

$$q_n \in (q'_m \| G) \cap (q'_m \| G') = \{q'_m\} \quad \text{für} \quad G \odot G'$$

unter Beachtung von (2.4) , was $q_n = q'_m$ bedeutet .

Da $\tau(p_o,q_o)\,\tau(q_o,p_o) = \mathrm{id} = \tau(q_o,p_o)\,\tau(p_o,q_o)$,

folgt

(1) $\tau(p_o,q_o) =: \tau$ ist eine Bijektion von $\mathfrak{P}$

mit $\tau^{-1} = \tau(q_o,p_o)$.

Wählen wir nun zwei beliebige Punkte p und q und dazu gemäß (2.5) zwei Punktfolgen

$p_o,p_1, \ldots ,p_n = p$ und $p_o,p'_1, \ldots ,p'_m = q$

und Geraden $G_{i_\nu} \odot G_o$ und $G'_{j_\mu} \odot G_o$ und konstruieren die entsprechenden Folgen

$q_1, \ldots ,q_n = p^\tau$ und $q'_1, \ldots ,q'_m = q^\tau$,

so liefert wiederum (A_6)

(2) $p \not\odot q \iff p^\tau \not\odot q^\tau$

und für alle $G \in \mathfrak{G}$

(3) $q^\tau \in (p^\tau \| G)$ falls $q \in (p \| G)$.

Ist G eine beliebige Gerade, so wählen wir einen beliebigen Punkt $g \in G$ und erhalten mit (3)

(4) $G^\tau \subset (g^\tau \| G) =: H \in \mathfrak{G}$.

Wendet man nun auf (4) die inverse Abbildung τ^{-1} an,

folgt $H^{\tau^{-1}} = (g^\tau \| G)^{\tau^{-1}} \subset (g^{\tau\tau^{-1}} \| G) = G$

oder $H = H^{\tau^{-1}\tau} \subset G^\tau$,

woraus sich zusammen mit (4)

(5) $G^{\tau} = (g^{\tau} \| G)$ für $G \in \mathfrak{G}$

ergibt.

Sind G_1, G_2 zwei beliebige Geraden mit $G_1 \| G_2$, so folgt mit (5) $G_1^{\tau} \| G_1 \| G_2 \| G_2^{\tau}$ und aus der Transitivität der Parallelitätsrelation schließlich

(6) $G_1^{\tau} \| G_2^{\tau}$ falls $G_1 \| G_2$.

Da (5') und (6) auch für τ^{-1} gelten, folgt nun mit (1), (2) und (3), daß τ eine Translation ist.

Die beiden Eigenschaften

$P_0^{\tau} = Q_0$ und $G^{\tau} = G$ für alle $G \| G_0$

folgen sofort mit Hilfe der Definition von τ und τ^{-1}. Somit ist $\tau(P_0, Q_0) = \tau$ die gesuchte $[P_0, Q_0]$-Translation.

Wir wollen nun die Struktur der Translationsgruppe $\mathfrak{T}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|\right]$ eines ATPR etwas genauer untersuchen.

Dazu betrachten wir zuerst die sie erzeugenden Spur-Translationen:

(3.1.3) Spur-Translationen von Kreuzgeraden sind vertauschbar.

Beweis: Sind S_1 und S_2 zwei Kreuzgeraden, τ_i $[S_i]$-Translationen für $i = 1, 2$ und P ein beliebiger Punkt, so erhalten wir aus

$$P \cdot P^{\tau_1} =: P_1 \cdot P^{\tau_2} =: P_2 \in S(P, G_1 \odot G_2)$$

durch wiederholte Anwendung von (3.1.2) und der Eigenschaft

der τ_i , jede Gerade $G \parallel G_i$ festzuhalten, zuerst mit

$$\{p\} = (p \parallel G_1) \cap (p \parallel G_2) \quad \text{und}$$

$$\{p^{\tau_1}\} = (p_1 \parallel G_1) \cap (p_1 \parallel G_2) = (p \parallel G_1) \cap (p_1 \parallel G_2)$$

$$\{p^{\tau_1\tau_2}\} = (p_2 \parallel G_1) \cap (p_1^{\tau_2} \parallel G_2) = (p_2 \parallel G_1) \cap (p_1 \parallel G_2)$$

und ebenso über

$$\{p^{\tau_2}\} = (p_2 \parallel G_1) \cap (p_2 \parallel G_2) = (p_2 \parallel G_1) \cap (p \parallel G_2)$$

$$\{p^{\tau_2\tau_1}\} = (p_2^{\tau_1} \parallel G_1) \cap (p_1 \parallel G_2) = (p_2 \parallel G_1) \cap (p_1 \parallel G_2) ,$$

woraus nun zusammen $p^{\tau_2\tau_1} = p^{\tau_1\tau_2}$ folgt .

(3.1.3) Zwei beliebige $[\![G]\!]$ - Translationen τ_1 , τ_2 einer beliebigen Geraden G sind vertauschbar.

Beweis: Sei p ein beliebiger Punkt auf G, F eine Kreuzgerade von G durch p und f_3, g_3 nach (A_2) Punkte auf F bzw. G mit $f_3 \not| p \not| g_3$ und $F = \overline{f_3 p}$, $G = \overline{g_3 p}$. (Man beachte auch noch die nach (2.2) gültige Symmetrie der Nicht-benachbart-Relation.)

Mit (2.1) folgt nun $f_3 \not| g_3$ und $H_3 := \overline{f_3 g_3}$ ist eine Kreuzgerade zu F und G.

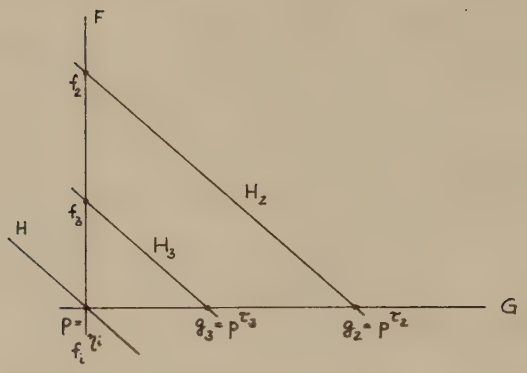
Da $E(p, G \odot F) = E(p, G \odot H_3)$, folgt für

$$p^{\tau_2} =: g_2 \in G \quad \text{und} \quad (g_2 \parallel H_3) =: H_2$$

mit (2.4) die eindeutige Existenz von $\{f_2\} := H_2 \cap F$.

Für $i = 2,3$ sei nun η_i die $[\![F]\!]$ - Translation, die f_i auf p abbildet, und τ_3 die $[\![G]\!]$ - Translation, die p auf g_3 abbildet .

Dann bildet $\eta_i \tau_i =: \sigma_i \in \mathfrak{T}[p, g_3, \not|, \parallel]$ f_i auf g_i ab.



Deshalb impliziert

$$H_i^{\sigma_i} = (f_i \| H_i)^{\sigma_i} = (f_i^{\sigma_i} \| H_i) = (g_i \| H_i) = H_i$$

und

$$H_i^{\gamma_i} = (f_i \| H_i)^{\gamma_i} = (f_i^{\gamma_i} \| H_i) = (p \| H_i) =: H \ ,$$

wenn man (3.1.2) beachtet,

$$H^{\sigma_i} = H_i^{\gamma_i\sigma_i} = H_i^{\gamma_i\gamma_i\tau_i} = H_i^{\gamma_i\tau_i\gamma_i} = H_i^{\sigma_i\gamma_i} = H_i^{\gamma_i} = H \ ,$$

woraus mit der $[\![H]\!]$ - Translation ϱ_i , die p^{σ_i} auf p abbildet, folgt

(1) $\sigma_i\varrho_i$ ist eine Dilatation mit $p^{\sigma_i\varrho_i} = p$ und $H_i^{\sigma_i\varrho_i} = H_i$ für $i = 2,3$.

Sei nun δ eine Dilatation, die $p^{\delta} = p$ und $H_3^{\delta} = H_3$ genügt. Dann folgt aus

$$\{g_3\} = G \cap H_3 = (p \| G) \cap H_3$$

auch

$$\{g_3^{\delta}\} \in (p \| G)^{\delta} \cap H_3^{\delta} \subset (p^{\delta} \| G) \cap H_3 = \{g_3\}$$

und somit wegen (2.8)

(2) Für jede Dilatation δ mit $p^{\delta} = p$ folgt aus

$$H_3^{\delta} = H_3 : \qquad \delta = id \quad .$$

Wendet man dies auf (1) an, so ergibt sich $\sigma_3\varrho_3 = id$ und $\sigma_3 = \varrho_3^{-1}$ ist eine $[\![H]\!]$ - Translation.

Durch mehrfaches Anwenden von (3.1.2) erhalten wir

$$\tau_2\tau_3\eta_3 = \tau_2(\eta_3\tau_3) = \tau_2\sigma_3 = \sigma_3\tau_2 = \eta_3(\tau_3\tau_2) = \tau_3\tau_2\eta_3$$

oder

$$(3) \qquad \tau_2\tau_3 = \tau_3\tau_2 \quad .$$

Nun gilt außerdem

$$H_3 = (\varrho_3 \| H) = (p^{\tau_3} \| H) = (p \| H)^{\tau_3} = H^{\tau_3}$$

und weiter mit (3.1.2) , (1) und (3)

$$\begin{aligned} H_3^{\sigma_2\varrho_2} &= H^{\tau_3\eta_2\tau_2\varrho_2} = H^{\eta_2\tau_3\tau_2\varrho_2} = H^{\eta_2\tau_2\tau_3\varrho_2} = \\ &= H^{\sigma_2\varrho_2\tau_3} = (p \| H)^{\sigma_2\varrho_2\tau_3} = (p^{\sigma_2\varrho_2} \| H)^{\tau_3} = \\ &= (p \| H)^{\tau_3} = H^{\tau_3} = H_3 \quad . \end{aligned}$$

Damit ist aber nach (2) auch $\sigma_2 = \varrho_2^{-1}$ eine $[\![H]\!]$ - Translation und mehrfache Anwendung von (3.1.2) liefert schließlich

$$\tau_1\tau_2\eta_2 = \tau_1(\eta_2\tau_2) = \tau_1\sigma_2 = \sigma_2\tau_1 = \eta_2(\tau_2\tau_1) = \tau_2\tau_1\eta_2$$

oder $$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1 \quad .$$

(3.1.4) Die von den $[\![G_i]\!]$ - Translationen einer Kreuzgeradenmenge $K = \{G_i \mid i \in I\}$ erzeugte Untergruppe T der Translationsgruppe $T[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \phi, \|]$ ist abelsch und operiert scharf einfach transitiv auf $\mathcal{P}$.

Beweis: Zunächst vertauschen zwei beliebige Elemente aus T wegen (3.1.2) und (3.1.3) .

Nun ist aber jede abelsche Gruppe T von Permutationen einer Menge $\mathcal{P}$, die transitiv auf $\mathcal{P}$ operiert, bereits scharf einfach transitiv :

Dazu seien p und q aus $\mathcal{P}$ und $\alpha, \beta \in T$ mit $p^\alpha = p^\beta = q$ gegeben. Nun gibt es für jedes $x \in \mathcal{P}$ ein $\sigma \in T$, so daß

$p^\sigma = x$, und deshalb ist

$x^\alpha = p^{\sigma\alpha} = p^{\alpha\sigma} = p^{\beta\sigma} = p^{\sigma\beta} = x^\beta$ für jedes $x \in \mathcal{P}$,

was $\alpha = \beta$ bedeutet .

Es reicht also zu zeigen, daß T transitiv auf $\mathcal{P}$ operiert :

Sind p_o, q zwei beliebige Punkte, so existiert nach (1.12) eine endliche Menge $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ und Punkte $p_1, \ldots, p_n = q$, die für $\nu = 1, \ldots, n$ $\quad p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu})$ erfüllen.

Bezeichnen wir nun die nach (3.1.1) eindeutige $[\![G_{i_\nu}]\!]$ - Translation, die $p_{\nu-1}$ auf p_ν abbildet, mit τ_ν , so wird $\quad \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \in T$ p_o auf q abbilden.

Abschließend soll nun gezeigt werden

(3.1.5) Die $[\![G_i]\!]$ - Translationen einer Kreuzgeradenmenge $K = \{G_i \mid i \in I\}$ erzeugen bereits die gesamte Translationsgruppe $T[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \phi, \|]$.

Beweis: Sei τ eine beliebige Spur-Translation, eine $[\![G]\!]$- Translation mit $G \in \mathcal{G}$. Nun wählen wir einen beliebigen Punkt $p \in G$.

Wie bereits in (3.1.4) gezeigt, gibt es ein $\eta \in T$ mit $p\eta = p^\tau \in G$.

Ist nun $G' \| G$, $q \in G'$ und $\sigma \in T$ mit $p^\sigma = q$, so gilt wieder mit (3.1.4)

$$G'\eta = (p^\sigma \| G)^\eta = (p \| G)^{\sigma\eta} = (p \| G)^{\eta\sigma} = (p^\eta \| G)^\sigma =$$
$$= G^\sigma = (p \| G)^\sigma = (p^\sigma \| G) = (q \| G) = G' ;$$

η ist also auch eine $[\![G]\!]$ - Translation .

Somit folgt aber mit (3.1.1) $\tau = \eta \in T$ und , da $T[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \phi, \|]$ von allen Spur-Translationen erzeugt wird, $T = T[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \phi, \|]$.

Fassen wir nun (3.1.4) und (3.1.5) zusammen, so können wir festhalten

(3.1.6) Die Translationsgruppe eines ATBR ist abelsch und operiert scharf einfach transitiv auf der Punktmenge.

Wählen wir jetzt zu dem Punkt $0 \in \mathcal{P}$

$$\langle 0\rangle := \{U \in \mathcal{G} \mid 0 \in U\} \quad , \quad B := \{u \in \mathcal{P} \mid u \not\ni 0\}$$

und zu jedem Punkt $p \in \mathcal{P}$ die eindeutige Translation $\tau(p) \in T$, die $0^{\tau(p)} = p$ erfüllt,

so wird die Punktmenge $\mathcal{P}$ durch

$$x^{\tau(p)} =: x + p \quad \text{für alle} \quad x,p \in \mathcal{P}$$

zu einer abelschen Gruppe, isomorph zu T.

Jede Translation $\tau(a)$ stimmt überein mit der Abbildung

$$x \in \mathcal{P} \longrightarrow x + a \quad \text{für alle} \quad x \in \mathcal{P} .$$

Um zu zeigen, daß $\langle 0\rangle$ eine Familie von Untergruppen von $(\mathcal{P},+)$ ist, wählen wir ein beliebiges $U \in \langle 0\rangle$.

Dann gilt für alle $u \in U$

$$U + (-u) = U^{\tau(-u)} = (u \parallel U)^{\tau(-u)} = (u^{\tau(-u)} \parallel U) =$$

$$= (0 \parallel U) = U .$$

Die Geradenmenge läßt sich nun darstellen als

$$\mathcal{G} = \{U + a \mid U \in \langle 0\rangle , \ a \in \mathcal{P}\} .$$

Denn für eine beliebige Gerade $G \in \mathcal{G}$ mit $(0 \parallel G) =: U$ gilt mit einem beliebigen $a \in G$

$$G = (a \parallel U) = U^{\tau(a)} = U + a \ ;$$

andererseits ist zu jedem $a \in \mathcal{P}$, $U \in \langle 0\rangle$

$U^{\tau(a)} = U+a$ eine zu U parallele Gerade.

Außerdem ist $U+a \parallel V+b$ äquivalent zu $U \parallel V$, was aber wegen $0 \in U \cap V$ und (A_3)

$$U = V \quad \text{bedeutet} .$$

Die Aussage $a \not\parallel b$ schließlich ist gleichbedeutend mit

$a^{\tau(-b)} \not\parallel b^{\tau(-b)}$ oder auch

$$a \not\parallel b \iff a - b \not\parallel 0 \iff a - b \in B \quad .$$

Die Abbildung

$$u \in B \longrightarrow \psi(u) = \overline{0u} \in \langle 0 \rangle$$

ist nun wegen (A_1) und (A_2) eine Abbildung von B auf die Familie $\langle 0 \rangle$ von Untergruppen von $(\mathcal{P},+)$.

Um abschließend die Gültigkeit von (ψ_1) und (ψ_2) zeigen zu können, müssen wir aber noch folgendes beweisen

(3.1.7) Ist $K := \{G_i := a_i + U_i \mid i \in I\}$ eine beliebige Kreuzgeradenmenge eines ATBR $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\parallel, \mathbb{I}]$, so gilt für alle $J \subset I$, $J \neq \{\}$,

$$U(0,J) = \sum_{i \in J}^{\oplus} U_i \quad ,$$

insbesondere also auch $\mathcal{P} = \sum_{i \in I}^{\oplus} U_i$.

Beweis: Sei dazu $K := \{G_i := a_i + U_i \mid i \in I\}$ eine beliebige Kreuzgeradenmenge und J eine beliebige Teilmenge von I, $J \neq \{\}$.

Dann gilt für ein beliebiges $u \in \sum_{i \in J}^{\oplus} U_i$

$u = u_{i_1} + \ldots + u_{i_n}$

mit einer endlichen Indexmenge $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset J$

und $u_{i_\nu} \in U_{i_\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n$.

Dies bedeutet aber

$$u = 0^{\tau(u_{i_1})\tau(u_{i_2}) \ldots \tau(u_{i_n})} \quad ,$$

woraus wir jetzt schrittweise, beginnend mit

$$0^{\tau(u_{i_1})} = u_{i_1} \in (0 \,\|\, U_{i_1}) \subset U(0,J) \quad ,$$

$$(u_{i_1} + \ldots + u_{i_{\nu-1}})^{\tau(u_{i_\nu})} \in (u_{i_1} + \ldots + u_{i_{\nu-1}} \,\|\, U_{i_\nu}) \subset U(0,J)$$

$$\text{für} \quad \nu = 2,\ldots,n \quad ,$$

also schließlich $u \in U(0,J)$ erhalten.

Ist andererseits p ein beliebiger Punkt aus $U(0,J)$,

so existiert nach (1.12) eine endliche Menge

$\{i_1, \ldots, i_n\} \subset J$ und eine Punktfolge $0 = p_0, p_1, \ldots, p_n = p$

mit $p_\nu \in (p_{\nu-1} \,\|\, G_{i_\nu})$ für $\nu = 1,\ldots,n$,

und wir erhalten aus

$$p_\nu \in (p_{\nu-1} \,\|\, G_{i_\nu}) = p_{\nu-1} + U_{i_\nu}$$

die Existenz von Punkten $u_{i_\nu} \in U_{i_\nu}$, so daß

$$p_\nu = p_{\nu-1} + u_{i_\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 1,\ldots,n \quad .$$

Damit erhalten wir aber $p = p_n = 0 + u_{i_1} + \ldots + u_{i_n}$

oder $$p = u_{i_1} + \ldots + u_{i_n} \in \sum_{i \in J} U_i$$

und so $$U(0,J) \subset \sum_{i \in J} U_i \quad .$$

Es gilt jedoch $\sum_{i \in J} U_i = \sum_{i \in J}^{\oplus} U_i$, womit dann

alles gezeigt ist;

denn sonst gäbe es einen Ausdruck

$$u_{i_1} + \ldots + u_{i_m} = 0 \quad \text{mit} \quad \{i_1,\ldots,i_m\} \subset J \quad ,$$

$$|\{i_1,\ldots,i_m\}| = m$$

und $u_{i_\nu} \in U_{i_\nu} - \{0\}$ für $\nu = 1,\ldots,m$.

Da natürlich $m \geq 2$ ergäbe dies

$$-u_{i_1} = u_{i_2} + \ldots + u_{i_m} \in U(0,\{i_2,\ldots,i_m\}) \quad \text{oder}$$

$$(0 \parallel G_{i_1}) \cap U(0,\{i_2,\ldots,i_m\}) \supset \{0, -u_{i_1}\}$$

im Widerspruch zu (1.15).

Mit Hilfe des soeben bewiesenen (3.1.7) ergeben sich nun (Ψ_1) und (Ψ_2) ohne weiteres aus (A_4) und (A_5), wenn man noch (A_1), (A_2) und auch die Teilraumeigenschaft (1.2) (T_1) beachtet.

Hiermit ist der Beweis von Satz (3.1) abgeschlossen, und wir haben gezeigt, daß sich jeder ATBR als $\mathrm{Aff}[(P,+),B,\Psi]$ darstellen läßt.

Wieder in mehreren Schritten soll nun im zweiten Teil von Paragraph 3 gezeigt werden, daß auch umgekehrt gilt

(3.2) Satz

Jede Geometrie $\mathrm{Aff}\left[(A,+),B,\mathfrak{T}\right] = \left[A,\mathfrak{G},\not\parallel,\parallel\right]$

mit $\mathfrak{G} = \{a + \overline{0u} \mid a \in A,\ u \in B\}$,

$a + \overline{0u} \parallel b + \overline{0v} \iff \overline{0u} = \overline{0v}$ und

$a \not\parallel b \iff a - b \in B$

ist ein ATER , dessen Translationen genau die Abbildungen $\tau(a)$ mit

$x^{\tau(a)} := x + a$ für alle $x,a \in A$

sind .

Die Gültigkeit von (A_1) , (A_2) und (A_3) ergibt sich durch einfaches Nachrechnen :

Seien dazu $p \neq q$ zwei beliebige nicht-benachbarte Punkte, also $p - q \in B$. Dann folgt sofort

$$q + \overline{O(p-q)} \in \mathfrak{G} \; ;$$

da aber auch

$q = q + 0 \in q + \overline{O(p-q)}$ und $p = q + p - q \in q + \overline{O(p-q)}$,

bleibt zu zeigen, daß

$\overline{pq} := q + \overline{O(p-q)}$ der Durchschnitt aller Geraden durch p und q ist.

Ist jedoch $a + \overline{Ou}$ eine beliebige Gerade durch p und q , so folgt aus

$p = a + u_1$ und $q = a + u_2$ mit $u_i \in \overline{Ou}$, $i = 1,2$,

auch $u_1 - u_2 \in \overline{Ou}$ und nun mit Hilfe von (ψ_1)

$\psi(u_1 - u_2) = \overline{O(u_1 - u_2)} \subset \overline{Ou}$, so daß schließlich

$u_2 + \overline{O(u_1 - u_2)} \subset \overline{Ou}$, was aber

$q + \overline{O(p-q)} = a + u_2 + \overline{O(u_1 - u_2)} \subset a + \overline{Ou}$ bedeutet.

Es gilt also

(3.2.1) Der Durchschnitt aller Geraden durch zwei nicht-benachbarte Punkte p und q ist die Gerade

$$\overline{pq} = q + \overline{O(p-q)} \; .$$

und damit auch (A_1).

Nun wollen wir zeigen

(3.2.2) Ist $a \in b + \overline{Ou}$, so folgt $b + \overline{Ou} = a + \overline{Ou}$.

Dies ergibt sich aber sofort aus

$a = b + u_1$ mit $u_1 \in \overline{Ou}$ oder $b = a - u_1$, woraus

$$b + \overline{Ou} = a - u_1 + \overline{Ou} = a + \overline{Ou} \quad \text{folgt .}$$

Damit ist die Gerade $p + \overline{Ou}$ sicherlich eine Parallele zur beliebig gewählten Geraden $a + \overline{Ou}$ durch den beliebig gewählten Punkt p.

Ist nun aber $b + \overline{Ov}$ eine solche Parallele, so gilt wegen $\overline{Ou} = \overline{Ov}$ und (3.2.2)

$$b + \overline{Ov} = p + \overline{Ov} = p + \overline{Ou} =: (p \parallel a + \overline{Ou}) .$$

Wir haben gezeigt

(3.2.3) Die Parallele zur Geraden $a + \overline{Ou}$, mit beliebigem $a \in \mathfrak{P}$, $u \in B$, durch den Punkt $p \in \mathfrak{P}$ ist die eindeutig bestimmte Gerade

$$(p \parallel a + \overline{Ou}) = p + \overline{Ou} .$$

Damit gilt auch (A_3).

Zum noch ausstehenden Nachweis von (A_2) wählen wir uns eine beliebige Gerade $a + \overline{Ou}$ und einen beliebigen Punkt $p \in a + \overline{Ou}$.

Dann folgt mit (3.2.2) sofort $a + \overline{Ou} = p + \overline{Ou}$, woraus sich aber für den Punkt $q := p - u \in a + \overline{Ou}$ nun $p - q = u \in B$, also $p \not\parallel q$,

und mit (3.2.1)

$$\overline{pq} = q + \overline{O(p-q)} = p - u + \overline{Ou} = p + \overline{Ou} = a + \overline{Ou}$$

ergibt, was die Gültigkeit von (A_2) zeigt.

Um den Nachweis von (A_4) und (A_5) führen zu können, müssen wir jedoch noch folgenden Hilfssatz voranstellen :

(3.2.4) Ist $E' := \{u_i \mid i \in I\} \subset E$ eine Generatormenge, so gilt für alle $J \subset I$ und $q \in A$

$$U(q,J) = \{q\} \cup \overline{\bigcup_{j \in J} (q + \overline{0u_j})} = q + \sum_{j \in J}^{\oplus} \overline{0u_j}$$

und $K := \{\overline{0u_i} \mid i \in I\}$ ist Kreuzgeradenmenge.

Beweis: Zunächst gilt

$$S := q + \sum_{j \in J}^{\oplus} \overline{0u_j} \subset U(q,J) ,$$

denn für ein beliebiges

$$x = q + u_{i_1}' + u_{i_2}' + \ldots + u_{i_n}' \in S$$

mit $u_{i_\nu}' \in \overline{0u_{i_\nu}}$, $i_\nu \in J$ für $\nu = 1,\ldots,n$

folgt aus $q \in U(q,J)$ schrittweise über

$$(q+u_{i_1}'+\ldots+u_{i_{\nu-1}}')+u_{i_\nu}' \in (q+u_{i_1}'+\ldots+u_{i_{\nu-1}}') \parallel q+\overline{0u_{i_\nu}}) \subset U(q,J)$$

schließlich $x \in U(q,J)$.

Da aber andererseits

$$\{q\} \cup \bigcup_{j \in J} (q + \overline{0u_j}) \subset q + \sum_{j \in J}^{\oplus} \overline{0u_j} = S ,$$

bleibt zu zeigen, daß S ein Teilraum ist :

Dazu wählen wir drei beliebige Punkte x, y und z aus S , wobei $x \neq y$ sein soll.

Dann folgt mit (Ψ_1) aus $y - x \in \sum_{j \in J}^{\oplus} \overline{0u_j}$ auch

$\overline{0(y-x)} \subset \sum_{j \in J}^{\oplus} \overline{0u_j}$ und somit $x + \overline{0(y-x)} \subset S$.

Analog ergibt sich $z + \overline{0(y-x)} \subset S$.

Es abschließend nachzuweisen, daß die Geradenmenge K die Eigenschaften (K_1) und (K_2) aus (1.6) erfüllt, wählen wir zwei beliebige Punkte $p \neq q$.

Nun lassen sich p und q auf endliche Weise darstellen

als $\quad p = u_{i_1}(p) + u_{i_2}(p) + \ldots + u_{i_n}(p)$

und $\quad q = u_{i_1}(q) + u_{i_2}(q) + \ldots + u_{i_n}(q)$

mit $u_{i_\nu}(p)\,,\ u_{i_\nu}(q) \in \overline{Ou_{i_\nu}}$ für $\nu = 1,\ldots,n$.

(Man erreicht dies durch Hinzufügen von endlich vielen Nullen.)

Es gilt, wie man leicht nachrechnet, für ein beliebiges $i_o \in I$

$$p \in (p+\overline{Ou_{i_o}}) \cap q + \sum_{j \in I-\{i_o\}}^{\oplus} \overline{Ou_j} = (p \parallel \overline{Ou_{i_o}}) \cap H(q,i_o)\,,$$
$$\text{falls } i_o \notin \{i_1,\ldots,i_n\}\ ;$$

ist jedoch $i_o \in \{i_1,\ldots,i_n\}$, o.E. sei $i_o = i_1$, so gilt

$$u_{i_1}(q) + u_{i_2}(p) + \ldots + u_{i_n}(p) \in (p \parallel \overline{Ou_{i_o}}) \cap H(q,i_o)\,,$$

was zusammen die Gültigkeit von (K_1) zeigt .

Ist nun $x \in \bigcap_{i \in I} H(q,i)$, so gilt wiederum wie oben

$$x = u_{i_1}(x) + \ldots + u_{i_m}(x) \quad \text{und}$$
$$q = u_{i_1}(q) + \ldots + u_{i_m}(q)\,,$$

und aus

$$u_{i_1}(x) + \ldots + u_{i_m}(x) \in u_{i_1}(q) + \ldots + u_{i_m}(q) + \sum_{i \in I-\{j\}}^{\oplus} \overline{Ou_i}$$
$$\text{für alle } j \in I$$

folgt schließlich

$$u_{i_1}(x) = u_{i_1}(q)\,,\ \ldots\,,\ u_{i_m}(x) = u_{i_m}(q) \quad \text{oder} \quad x = q\,,$$

also die Gültigkeit von (K_2) .

Mit Hilfe von (3.2.4) , ($\mathfrak{H}_1$) und ($\mathfrak{H}_2$) folgt nun aber sofort die Gültigkeit von (A_4) und (A_5), und übrig bleibt der Nachweis des Kleinen Axioms von Desargues (A_6).

Da der Beweis analog zu dem im ebenen Fall bei Leißner [13] verläuft, seien hier nur die wichtigsten Schritte angegeben.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz

(3.2.5) Aus $q' - q = p' - p$ und $p', p \in a + \overline{Ou} =: G$
folgt $q' \in (q \parallel G)$ für alle $G \in \mathfrak{G}$.

Beweis: Aus $p', p \in G$ folgt $p' - p =: u' \in \overline{Ou}$
und damit auch $q' - q = u'$ oder $q' = q + u' \in (q \parallel G)$.

Nun seien $p_0, \dots, p_n$ und $q_0, \dots, q_n$ ein $[\![G_0]\!]$ - Parallelodrom und $q_0 = p_0 + u_0' \in p_0 + \overline{Ou_0} = (p_0 \parallel G_0)$.
Durch vollständige Induktion soll gezeigt werden, daß auch $q_n = p_n + u_0'$, denn dann gilt
$q_n - q_0 = p_n - p_0$ und somit unter Beachtung von (3.2.5) (A_6).
Gilt aber
$q_{i-1} = p_{i-1} + u_0'$ und $p_i = p_{i-1} + v_i' \in (p_{i-1} \parallel \overline{Ov_i}) = (p_{i-1} \parallel H_i)$,
so gilt für $x_i = p_i + u_0' \in G_i = (p_i \parallel \overline{Ou_0})$
$x_i = p_{i-1} + v_i' + u_0' = q_{i-1} + v_i' \in (q_{i-1} \parallel H_i)$,
woraus sich wegen $G_i \cap (q_{i-1} \parallel H_i) = \{q_i\}$
$x_i = q_i$ und somit $q_i = p_i + u_0'$ ergibt.

Wir haben jetzt gezeigt, daß jede Geometrie Aff $[(A,+),B,\in]$ ein ATBR ist und wollen anschließend noch die zugehörige Translationsgruppe bestimmen.

Dazu wählen wir eine Generatormenge $B' := \{u_i \mid i \in I\} \subset B$ und können nun ohne Schwierigkeiten feststellen :

(3.2.6) Für alle $i \in I$ ist

$$\tau(u_i) : \quad x \longrightarrow x^{\tau(u_i)} := x + u_i \quad \text{für alle } x \in A$$

eine $[\![\overline{Ou_i}]\!]$ - Translation .

Nehmen wir einen beliebigen Punkt $a \in A$,

so gilt wegen (Ψ_1)

$$a = u_{i_1}(a) + u_{i_2}(a) + \ldots + u_{i_n}(a)$$

mit $u_{i_\nu}(a) \in \overline{Ou_{i_\nu}}$ und $i_\nu \in I$ für alle $\nu \in \{1,\ldots,n\}$,

und somit mit Hilfe von (3.2.6)

$\tau(a) := \tau(u_{i_1}(a))\,\tau(u_{i_2}(a)) \ldots \tau(u_{i_n}(a))$ ist eine Translation mit $x^{\tau(a)} = x + a$ für alle $x \in A$.

Ist umgekehrt τ eine beliebige Translation aus $T\,[A,\in,\not\in,\|]$,

so sei $0^\tau =: a \in A$.

Beachtet man (3.1.6) , so folgt $\tau = \tau(a)$,

und somit ist $T = \{\tau(a) \mid a \in A\}$

die Translationsgruppe von Aff $[(A,+),B,\in]$.

Damit haben wir Satz (3.2) vollständig bewiesen und erhalten in Verbindung mit (3.1) den

(3.3) Strukturssatz für Affine Translations-Barbilianräume

Die Klasse der Affinen Translations-Barbilianräume $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ stimmt bis auf Isomorphie überein mit den Strukturen Aff $[(A,+),B,\Psi]$.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch folgende, scheinbar selbstverständliche Eigenschaft eines ATBR nachweisen :

(3.4) Jede Gerade ist ein Unterraum.

Beweis: Da jede Gerade G mit zwei beliebigen nicht-benachbarten Punkten x und y wegen (A_1) auch $\overline{xy}$ enthält, müssen wir nach Definition des Unterraumes lediglich zeigen, daß G mit einer beliebigen Geraden $G' \subset G$ und einem beliebigen Punkt $q \in G$ auch die Gerade $(q \| G')$ enthält.

Sei dazu $p \in G' \cap G$ und $p_0 := p, p_1, \ldots, p_n = q$ eine nach (2.5) existierende endliche Punktfolge mit Geraden

$G_{i_\nu} \in G'$ und $p_\nu \in (p_{\nu-1} \| G_{i_\nu})$.

Ist nun $x \in (q \| G')$ ein beliebiger Punkt, so erhalten

wir suksessive beginnend mit $\nu = n$ unter Beachtung von (2.4) eine Punktfolge $x_n = x, x_{n-1}, \dots, x_0$ durch $\{x_{\nu-1}\} := (x_\nu \| G_{i_\nu}) \cap (p_{\nu-1} \| G')$ und damit einen Punkt

$$x_0 \in (p_0 \| G') = G' \subset G \quad , \text{ d.h. } \quad x_0 \in (p_0 \| G) \quad .$$

Nun können wir wiederum schrittweise, jetzt beginnend mit $\nu = o$, mit Hilfe von (A_6) zeigen, daß

$$x_\nu \in (p_\nu \| G) \quad \text{für alle} \quad \nu = 1, \dots, n \quad ,$$

wenn man jeweils beachtet, daß $p_{\nu-1}, x_{\nu-1}$ und p_ν, x_ν ein $[\![G_{i_\nu}]\!]$- Parallelodrom sind.

So ergibt sich schließlich auch

$$x = x_n \in (p_n \| G) = (q \| G) = G \quad ,$$

woraus $(q \| G') \subset G$ folgt.

4. Affine Desarguessche Barbilianräume

In diesem Abschnitt sollen Affine Translations-Barbilianräume $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\in, \parallel]$, die sich ja, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, als Aff $[(\mathcal{P},+),B,\Psi]$ darstellen lassen, untersucht werden, wenn in ihnen ein zusätzliches Axiom, das sogenannte Verallgemeinerte Große Axiom von Desargues, gilt :

(A_7) Sind z, p_0, q_0 drei Punkte einer Geraden G_0 , n eine beliebige natürliche Zahl und gibt es für alle $\nu \in \{1,\dots,n\}$ Punkte p_ν, q_ν , Geraden H_ν und Unterräume $U_\nu \neq \mathcal{P}$, so daß

(1) $z \in U_\nu$

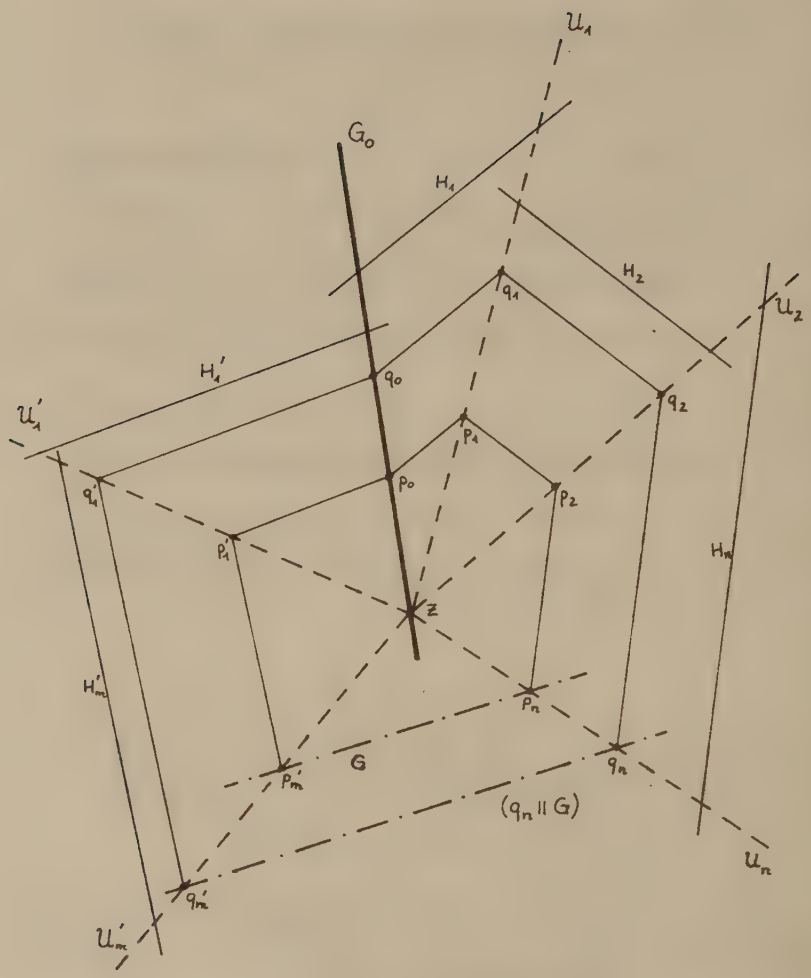
(2) $\{p_\nu\} = (p_{\nu-1} \parallel H_\nu) \cap U_\nu$

(3) $\{q_\nu\} = (q_{\nu-1} \parallel H_\nu) \cap U_\nu$,

so heißt die Folge von Punkten $p_0,\dots,p_n$ und $q_0,\dots,q_n$ $\langle z \rangle$ - Parallelodrom .

Sind nun $p_0,\dots,p_n$; $q_0,\dots,q_n$ und $p_0,\dots,p_m'$; $q_0,\dots,q_m'$ zwei $\langle z \rangle$ - Parallelodrome, dann gilt im Falle $G_0 = \overline{p_0 z}$:

Aus $p_n, p_m' \in G$ folgt $q_m' \in (q_n \parallel G)$ für alle $G \in \mathcal{G}$.



Bemerkung: Ein wichtiger Spezialfall von (A_7) ergibt sich, wenn die Unterräume U_ν für $\nu = 1,..,n$ Geraden sind (man beachte (3.4)). (A_7) entspricht dann dem von Leißner in [13] geforderten Axiom $(A_6)(b)$ für den ebenen Fall, wo ja jeder Unterraum $U_\nu \neq P$ eine Gerade ist.

Wir nennen einen ATBR , in dem (A_7) gilt, einen Affinen Desarguesschen Barbilianraum (ADBR) und wollen im folgenden seine algebraische Struktur bestimmen, um schließlich die Äquivalenz der ADBR mit den affinen Geometrien $\mathrm{Aff}(M_R,B)$ festzustellen .

Definition $\mathrm{Aff}(M_R,B)$

Sei R ein Ring mit Einselement, M_R ein freier rechter R - Modul und B ein Barbilianbereich, d.h. eine nichtleere Teilmenge von M_R , die folgende Bedingungen erfüllt:

(B_1) Jedes $u \in B$ gehört zu einer Basis von M_R , die ganz in B enthalten ist und mindestens 2 Elemente hat.

(B_2) $\sum_{i\in I-\{j\}} (u_i R) - u_j \subset B$, wenn $\{u_i \mid i \in I\}$ eine Basis von M_R ist, die ganz in B enthalten ist.

Definiert man nun

$$\mathcal{P} := M_R \quad , \quad \mathcal{G} := \left\{ G_a^u := a + uR \mid a \in M_R \, , \, u \in B \right\} \, ,$$

$$p \not\sim q \iff p - q \in B \quad \text{und} \quad G_a^u \parallel G_b^v \iff uR = vR \, ,$$

so sollen diese Strukturen $\left[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \not\sim, \parallel\right]$ mit $\mathrm{Aff}(M_R,B)$ bezeichnet werden.

In mehreren Schritten soll jetzt zuerst gezeigt werden

(4.1) Satz

Jeder ADBR $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \phi, \|]$ läßt sich darstellen als $\mathrm{Aff}(M_R, B)$.
Hierbei ist für einen beliebigen festen Punkt $O \in \mathcal{P}$ R der Ring aller $\langle O \rangle$ - Dilatationen, $M_R = \mathcal{P}_R$ und $B = \{u \in \mathcal{P} \mid u \not\in O\}$.

Wie wir bereits aus Satz (3.3) wissen, läßt sich $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \phi, \|]$ darstellen als $\mathrm{Aff}\ [(\mathcal{P},+), B, \Psi]$.

Wir werden deshalb als erstes die Menge R aller $\langle O \rangle$ - Dilatationen näher betrachten, um schließlich zu zeigen, daß sie einen Ring bilden, über dem die abelsche Gruppe $(\mathcal{P},+)$ ein Modul ist.

(4.1.1) Die Menge R aller $\langle O \rangle$ - Dilatationen eines ATBR $\mathrm{Aff}\ [(\mathcal{P},+), B, \Psi]$ stimmt überein mit $\{\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{P},+) \mid U\alpha \subset U \text{ für alle } U \in \langle O \rangle\}$, wobei $\mathrm{End}(\mathcal{P},+)$ der Endomorphismenring von $(\mathcal{P},+)$ ist .

Beweis: Natürlich gilt

$$R \supset \{\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{P},+) \mid U\alpha \subset U \text{ für alle } U \in \langle O \rangle\} .$$

Ist nun umgekehrt $\alpha \in R$, so gilt

(1) $\quad 0\alpha = 0$

und $\quad (a \| U)\alpha \subset (a\alpha \| U)$ oder

(2) $\quad (a + U)\alpha \subset a\alpha + U$ für alle $a \in \mathcal{P}$ und $U \in \langle 0 \rangle$,

womit man aber für $a = 0$

(3) $\quad U\alpha \subset U$ für alle $U \in \langle 0 \rangle$

erhält.

Zu zeigen bleibt noch die Homomorphieeigenschaft von α.

Dazu wählen wir eine Kreuzgeradenmenge $K := \{U_i \mid i \in I\} \subset \langle 0 \rangle$

und zeigen zuerst durch vollständige Induktion

(4) $(u_{i_1} + u_{i_2} + \ldots + u_{i_n})\alpha = u_{i_1}\alpha + u_{i_2}\alpha + \ldots + u_{i_n}\alpha$

wenn $\{i_1, \ldots, i_n\}$ eine endliche Teilmenge von I ist

mit n verschiedenen Elementen und $u_{i_\nu} \in U_{i_\nu}$

für $\nu = 1, \ldots, n$.

Angenommen (4) gilt für $n < k + 1 \geq 2$ und

$s := u_{i_1} + u_{i_2} + \ldots + u_{i_k} + u_{i_{k+1}}$

ist eine Summe mit $k+1$ Summanden wie in (4) gefordert.

Dann können wir schreiben $\quad s = a + u_{i_k} + u_{i_{k+1}}$

mit $\quad a := u_{i_1} + \ldots + u_{i_{k-1}}$ oder $a := 0$ falls $k = 1$.

Nun folgt aber aus

$$s \in (a + u_{i_k}) + U_{i_{k+1}} \cap (a + u_{i_{k+1}}) + U_{i_k}$$

mit (2)

$$s\alpha \in (a + u_{i_k})\alpha + U_{i_{k+1}} \cap (a + u_{i_{k+1}})\alpha + U_{i_k}$$

und somit die Existenz von Punkten

$u_{i_{k+1}}' \in U_{i_{k+1}}$, $u_{i_k}' \in U_{i_k}$, so daß

$$(*) \quad s\alpha = (a + u_{i_k})\alpha + u_{i_{k+1}}' = (a + u_{i_{k+1}})\alpha + u_{i_k}' .$$

Mit Hilfe der Induktionsannahme ergibt dies,

man beachte, daß a nur aus k-1 Summanden besteht,

$$s\alpha = a\alpha + u_{i_{k+1}}\alpha + u_{i_k}' = a\alpha + u_{i_k}\alpha + u_{i_{k+1}}'$$

oder mit (3)

$$u_{i_k}\alpha - u_{i_k}' = u_{i_{k+1}}\alpha - u_{i_{k+1}}' \in U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} = \{0\}$$

und damit

$$u_{i_k}' = u_{i_k}\alpha .$$

Setzen wir dies in (*) ein, so erhalten wir

$$s\alpha = (a + u_{i_{k+1}})\alpha + u_{i_k}\alpha =$$

$$= (u_{i_1} + \dots + u_{i_{k-1}} + u_{i_{k+1}})\alpha + u_{i_k}\alpha$$

und nun mit der Induktionsannahme schließlich

$$s\alpha = u_{i_1}\alpha + u_{i_2}\alpha + \dots + u_{i_k}\alpha + u_{i_{k+1}}\alpha .$$

Um die Homomorpheseigenschaft von α für beliebige Summen zeigen zu können, brauchen wir aber noch

(5) $(u_i + u_i')\alpha = u_i\alpha + u_i'\alpha$ für alle $u_i, u_i' \in U_i$

bei beliebigem, aber festem $i \in I$.

Dazu wählen wir zusätzlich ein festes $j \in I$ mit $j \neq i$ und einen Punkt $u_j \in U_j$, so daß $U_j = \overline{Ou_j}$ (möglich nach (A_2)) .

Nun ist nach (A_5) unter Beachtung von (2.1) und (2.2)

$\Psi(u_j - u_i)$ eine Kreuzgerade zu U_i für alle $u_i \in U_i$;

wir können also eine Kreuzgeradenmenge $K' \subset \langle 0 \rangle$ finden,

die U_i und $\Psi(u_j - (-u_i)) = \Psi(u_j + u_i)$ enthält.

So erhalten wir mit (4), angewendet auf K' und dann

auf K ,

$$(u_j + u_i + u_i')\alpha = ((u_j + u_i) + u_i')\alpha =$$
$$= (u_j + u_i)\alpha + u_i'\alpha = u_j\alpha + u_i\alpha + u_i'\alpha ,$$

ebenso aber auch, da $u_i + u_i' \in U_i$, wieder mit (4)

$$(u_j + u_i + u_i')\alpha = (u_j + (u_i + u_i'))\alpha = u_j\alpha + (u_i + u_i')\alpha ,$$

was nun zusammen

$u_j\alpha + (u_i + u_i')\alpha = u_j\alpha + u_i\alpha + u_i'\alpha$, d.h.

$(u_i + u_i')\alpha = u_i\alpha + u_i'\alpha$, ergibt .

Ist jetzt aber $a \in \mathcal{P}$ ein beliebiger Punkt, so können wir

ihn nach (3.1.7) eindeutig darstellen als (endliche)

Summe

$$a = \sum_{i \in I} u_i(a) \quad \text{mit } u_i(a) \in U_i \text{ für alle } i \in I .$$

Und wir erhalten mit (4) und (5) für alle $a,b \in \mathcal{P}$

$$(a + b)\alpha = \Big(\sum_{i \in I} u_i(a) + \sum_{i \in I} u_i(b) \Big)\alpha =$$
$$= \Big(\sum_{i \in I} (u_i(a) + u_i(b)) \Big)\alpha =$$
$$= \sum_{i \in I} (u_i(a) + u_i(b))\alpha =$$

$$(a + b)\alpha = \sum_{i\in I}(u_i(a)\alpha + u_i(b)\alpha) =$$

$$= \sum_{i\in I} u_i(a)\alpha + \sum_{i\in I} u_i(b)\alpha =$$

$$= (\sum_{i\in I} u_i(a))\alpha + (\sum_{i\in I} u_i(b))\alpha =$$

$$= a\alpha + b\alpha \quad .$$

Für zwei beliebige Elemente $\alpha, \beta \in R$ gilt nun darüberhinaus für alle $U \in \langle 0 \rangle$

$U(\alpha - \beta) \subset U\alpha + U(-\beta) \subset U - U = U$ und

$U(\alpha\beta) = (U\alpha)\beta \subset U\beta \subset U$,

so daß wir festhalten können

(4.1.2) $(R,+,\cdot)$ ist ein Unterring von $End(\mathcal{P},+)$, der die Identität enthält,
und $(\mathcal{P},+)$ wird ein rechter R - Modul .

Es soll nun in mehreren Schritten folgende Behauptung bewiesen werden; sie ist für die Darstellung der Geraden von entscheidender Bedeutung.

(4.1.3) Es gibt für alle p_o, $q_o \in \mathcal{P}$ mit $p_o \not\in 0$ und $q_o \in \overline{Op_o}$ eine $\langle 0 \rangle$ - Dilatation, die p_o auf q_o abbildet.

Beweis: Sind p_o und q_o zwei beliebige Punkte mit $p_o \not\in 0$ und $q_o \in \overline{Op_o} =: G_o \in \mathfrak{G}$, so wählen wir nach (A_4) eine Kreuzgeradenmenge $K := \{G_i \mid i \in I\} \subset \langle 0 \rangle$ mit $o \in I$, weiterhin nach (A_2) Punkte $p_j \in G_j$ mit $G_j = \overline{Op_j}$ und unter Beachtung von (A_5) bzw. (2.4) Punkte

$\{q_j\} := (q_o \parallel \overline{p_o p_j}) \cap G_j$ für alle $j \in I-\{o\}$.

Nun definieren wir eine Abbildung σ von $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}$ in folgender Weise:

Ist $x \in G_j$, $j \in I-\{o\}$, so sei

$\{x^\sigma\} := (q_o \parallel \overline{p_o x}) \cap G_j$

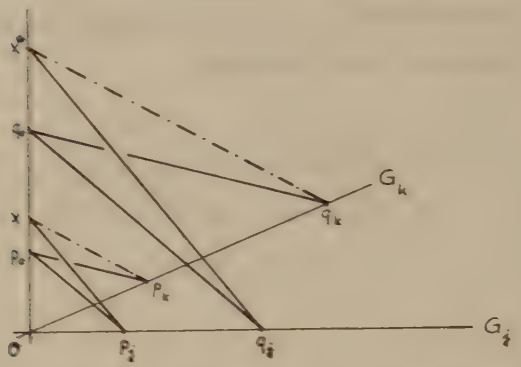
sein nach (A_5) und (2.4) eindeutig bestimmtes Bild.

Ist $x \in G_o$, so sei entsprechend

$\{x^\sigma\} := (q_j \parallel \overline{p_j x}) \cap G_o$ für ein $j \neq o$.

Daß diese Festlegung unabhängig von der Wahl von j ist, läßt sich mit Hilfe von (A_7) zeigen. Man be-

achte dabei die Bemerkung zu (A_7) :



P_o, P_j, x ; q_o, q_j, x^ϵ und P_o, P_k ; q_o, q_k
sind zwei $\langle 0 \rangle$ - Parallelodrome,
und somit gilt, da $x \neq p_k$, also $x, p_k \in \overline{xp_k}$,
mit (A_7) auch $x^\epsilon \in (q_k \parallel \overline{p_k x}) \cap G_o$.

Ist $x \in \mathfrak{P}$ beliebig, so läßt sich x nach (3.1.7) eindeutig darstellen als(endliche) Summe $x = \sum_{i \in I} u_i(x)$
mit $u_i(x) \in G_i$ für alle $i \in I$,
und es sei nun
$x^\epsilon := \sum_{i \in I} u_i(x)^\epsilon$.
Dies ist eindeutig bestimmt und übereinstimmend
mit der bisher gegebenen Definition für $x \in G_i$, $i \in I$.

Aus der Definition ergibt sich sofort, daß ϵ die
Bedingung
(1) $0^\epsilon = 0$ erfüllt .

Nun wollen wir zeigen

(2) Für alle $x \in H(0,o)$ gilt :

$$\{x^{\sigma}\} = (q_o \| \overline{p_o x}) \cap H(0,o) \quad .$$

Sei deshalb $x \in H(0,o)$ beliebig vorgegeben,

dann können wir wieder mit (3.1.7) x eindeutig darstellen

als (endliche) Summe $\quad x = \sum_{i \in I-\{o\}} u_i(x) \quad .$

Wir wollen deshalb den Beweis durch vollständige Induktion

nach der Länge dieser Summe führen.

Ist $x = u_i(x)$ für ein $i \in I-\{o\}$,

so folgt nach Definition von σ

$$\{x^{\sigma}\} = \{u_i(x)^{\sigma}\} = (q_o \| \overline{p_o x}) \cap G_i = (q_o \| \overline{p_o x}) \cap H(0,o)$$

unter Beachtung von (A_5) und (1.16) .

Angenommen (2) gilt für

$$x = \sum_{\substack{i_\nu \in I-\{o\} \\ \nu=1}}^{n} u_{i_\nu}(x) \quad \text{mit} \quad n < k+1 \geqslant 2$$

und $\quad y = u_{i_1}(y) + \ldots + u_{i_k}(y) + u_{i_{k+1}}(y)$

sei eine Summe mit k+1 Summanden , $y \in H(0,o)$.

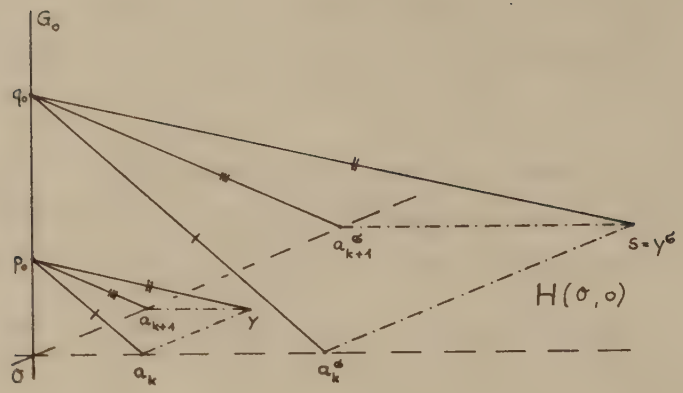
Dann können wir schreiben

$$y = a + u_{i_k}(y) + u_{i_{k+1}}(y)$$

mit $\quad a := u_{i_1}(y) + \ldots + u_{i_{k-1}}(y)$ oder $a := 0$ falls $k=1$.

Damit ergibt sich aber für

$$a_k := a + u_{i_k}(y) \quad \text{und} \quad a_{k+1} := a + u_{i_{k+1}}(y) \ ,$$



da a_k , $a_{k+1} \in E(a, G_{i_k} \oplus G_{i_{k+1}})$, mit (2.4)

$$(*) \qquad \{y\} = (a_k \| G_{i_{k+1}}) \cap (a_{k+1} \| G_{i_k}) \quad .$$

Analog erhält man für

$$y^\sigma = a^\sigma + u_{i_k}(y)^\sigma + u_{i_{k+1}}(y)^\sigma = a_k^\sigma + u_{i_{k+1}}(y)^\sigma =$$

$$= a_{k+1}^\sigma + u_{i_k}(y)^\sigma$$

$$(**) \qquad \{y^\sigma\} = (a_k^\sigma \| G_{i_{k+1}}) \cap (a_{k+1}^\sigma \| G_{i_k}) \quad ,$$

denn a_k^σ, $a_{k+1}^\sigma \in E(a^\sigma, G_{i_k} \oplus G_{i_{k+1}})$.

Weiterhin gilt nach Induktionsannahme

$$\{a_k^\sigma\} = (q_o \| \overline{p_o a_k}) \cap H(0,o) \qquad \text{und}$$

$$\{a_{k+1}^\sigma\} = (q_o \| \overline{p_o a_{k+1}}) \cap H(0,o) \quad ;$$

wenn man jetzt unter Beachtung von (A_5) und (1.16)

$$\{s\} := (q_o \| \overline{p_o y}) \cap H(0,o) \qquad \text{setzt,}$$

so ergeben die $\langle 0 \rangle$ - Parallelodromien

$$p_o, a_k \; ; \; q_o, a_k^{\sigma} \quad , \quad p_o, y \; ; \; q_o, s \quad \text{und} \quad p_o, a_{k+1} \; ; \; q_o, a_{k+1}^{\sigma}$$

mit (*), (**) und (A_7)

$$s \in (a_k^{\sigma} \parallel G_{i_{k+1}}) \cap (a_{k+1}^{\sigma} \parallel G_{i_k}) = \{y^{\sigma}\}$$

oder $$\{y^{\sigma}\} = (q_o \parallel \overline{p_o y}) \cap H(0,o) \quad .$$

Wir brauchen nun noch folgende Eigenschaft von σ :

(3) Für zwei beliebige Punkte $g_1, g_2 \in G_i$, $i \in I$, gilt :

$$(g_1 + g_2)^{\sigma} = g_1^{\sigma} + g_2^{\sigma} \quad .$$

Sind jedoch g_1 und g_2 zwei solche Punkte auf G_i , so wählen wir $j \neq i$, $j \in I$.

Mit Hilfe von (2.4) ist

$$\{g_2'\} := \{p_j + g_2\} = (g_2 \parallel G_j) \cap (p_j \parallel G_i)$$

eindeutig festgelegt ,

und mit (2.1) erhalten wir

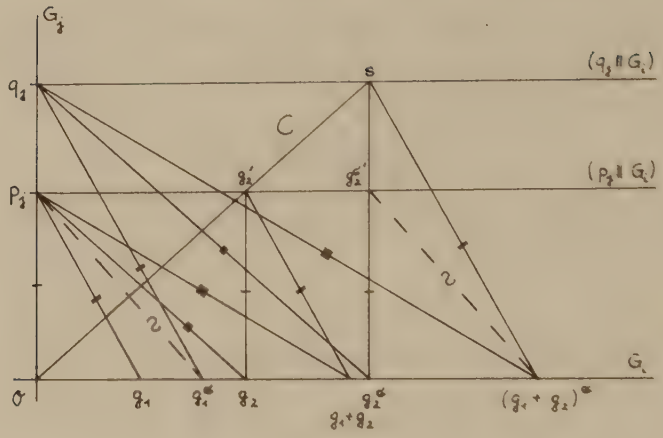
$$g_2' \neq 0 \quad \text{und} \quad \overline{g_2' 0} =: C \odot G_i \quad .$$

Wieder mit (2.4) ist nun auch

$$\{s\} := (q_j \parallel G_i) \cap C$$

eindeutig definiert.

Die $\langle 0 \rangle$ - Parallelodromie $g_2', p_j, g_2 \; ; \; s, q_j, g_2^{\sigma}$



liefert nun mit (A_7) $\qquad s \in (g_2^\sigma \| G_j)$

und die $\langle 0 \rangle$ - Parallelodromie

$g_2', p_j, g_1+g_2 \; ; \; s, q_j, (g_1+g_2)^\sigma$ entsprechend

$$s \in \left((g_1+g_2)^\sigma \| \overline{p_j g_1} \right) ,$$

da nämlich aus $g_1 \in (p_j \| \overline{p_j g_1})$

$$g_1+g_2 \in (g_2' \| \overline{p_j g_1}) = (p_j+g_2 \| \overline{p_j g_1}) \quad \text{folgt .}$$

Schließlich ergibt sich mit

$$\{g_2^{\sigma\prime}\} := \{p_j + g_2^\sigma\} = (g_2^\sigma \| G_j) \cap (p_j \| G_i)$$

aus der $[\![G_i]\!]$ - Parallelodromie

$p_j, q_j, g_1^\sigma \; ; \; g_2^{\sigma\prime}, s, (g_1+g_2)^\sigma$ mit (A_6)

$$(g_1+g_2)^\sigma \in (g_2^{\sigma\prime} \| \overline{p_j g_1^\sigma}) = (p_j+g_2^\sigma \| \overline{p_j g_1^\sigma})$$

und somit wegen

$g_1^\sigma \in (p_j \| \overline{p_j g_1^\sigma})$, also $g_1^\sigma + g_2^\sigma \in (p_j+g_2^\sigma \| \overline{p_j q_1^\sigma})$,

nun $\qquad (g_1+g_2)^\sigma = g_1^\sigma + g_2^\sigma$.

Jetzt können wir zeigen, daß σ eine Dilatation ist :

Seien L eine beliebige Gerade und a,b zwei beliebige Punkte mit $a \in (b \| L) =: L_1$,

dann können wir wieder a und b eindeutig darstellen als (endliche) Summen

$$a = \sum_{i \in I} u_i(a) \quad \text{und} \quad b = \sum_{i \in I} u_i(b)$$

$$\text{mit } u_i(a) , u_i(b) \in G_i \text{ für alle } i \in I .$$

Durch Hinzufügen von endlich vielen Nullen können wir also schreiben

$$a = \sum_{\nu=0}^{n} u_{i_\nu}(a) \quad \text{und} \quad b = \sum_{\nu=0}^{n} u_{i_\nu}(b) ,$$

wobei $i_o = o$ und $u_{i_\nu}(a) , u_{i_\nu}(b) \in G_{i_\nu}$

und $i_\nu \in I$ für $\nu = o,1,\ldots,n$.

Somit gilt für die Translation

$$\tau_1 := \tau(-u_{i_o}(b))\ \tau(-u_{i_1}(a))\ \tau(-u_{i_2}(a)) \ldots \tau(-u_{i_n}(a))$$

$$a' := a^{\tau_1} = a - u_{i_o}(b) - u_{i_1}(a) - \ldots - u_{i_n}(a) =$$

$$= u_{i_o}(a) - u_{i_o}(b) \in G_{i_o} = G_o$$

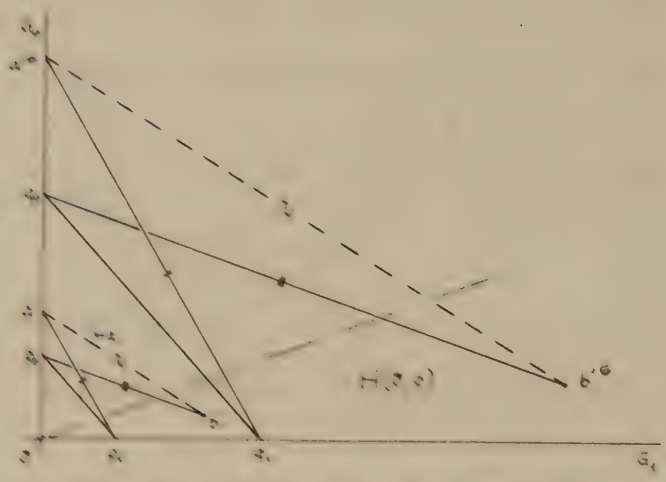
und

$$b' := b^{\tau_1} = b - u_{i_o}(b) - u_{i_1}(a) - \ldots - u_{i_n}(a) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} (u_{i_\nu}(b) - u_{i_\nu}(a)) \in H(0,o)$$

und weiterhin mit (3.1.1)(5)

$$L_1^{\tau_1} =: L_2 \| L_1 \quad \text{und} \quad a', b' \in L_2 .$$



Mit Hilfe von (4_0) und (2) ergibt sich nun aus den

(0) - Parallelodromien

$$P_0,P_1,a^{\sigma} \; ; \; Q_0,Q_1,a'^{\sigma} \quad \text{und} \quad P_0,b^{\sigma} \; ; \; Q_0,b'^{\sigma}$$

$$b'^{\sigma} \in (a'^{\sigma} \| L_2) = (a^{\sigma} \| L_1) \quad .$$

Nun ist

$$\tau_2 := \tau(u_{i_0}(b)^{\sigma}) \; \tau(u_{i_1}(a)^{\sigma}) \; \tau(u_{i_2}(a)^{\sigma}) \; \dots \; \tau(u_{i_n}(a)^{\sigma})$$

ebenfalls eine Translation,

und es gilt wieder unter Beachtung von (3.1.1)(5), der Transitivität der Parallelitätsrelation und auch (3)

$$L_2^{\tau_2} = L_2 \| L_2 \| L_1 \qquad \text{oder} \qquad L_2 \| L_1 \quad ,$$

$$a'^{\sigma\tau_2} = (u_{i_0}(a) - u_{i_0}(b))^{\tau_2} = (u_{i_0}(a)^{\sigma} - u_{i_0}(b)^{\sigma})^{\tau_2} =$$

$$= u_{i_0}(a)^{\sigma} + u_{i_1}(a)^{\sigma} + u_{i_2}(a)^{\sigma} + \dots + u_{i_n}(a)^{\sigma} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} u_{i_\nu}(a)^{\sigma} = a^{\sigma} \in L_2 \| L_1 \qquad \text{und}$$

$$b^{\sigma\tau_2} = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} (u_{i_\nu}(b) - u_{i_\nu}(a))^{\sigma} \Big)^{\tau_2} =$$

$$= \Big(\sum_{\nu=1}^{n} (u_{i_\nu}(b)^{\sigma} - u_{i_\nu}(a)^{\sigma}) \Big)^{\tau_2} = \sum_{\nu=0}^{n} u_{i_\nu}(b)^{\sigma} =$$

$$= b^{\sigma} \in L_3 \parallel L_1 \quad ,$$

was schließlich

$$a^{\sigma} \in (b^{\sigma} \parallel L_1) = (b^{\sigma} \parallel L) \qquad \text{ergibt}$$

und den Beweis von (4.1.3) abschließt .

Mit Hilfe von (4.1.1) , (4.1.3) , (A_1) und (A_2) erhält man nun für das Geradenbüschel durch 0 folgende Darstellung

$$\langle 0 \rangle = \{uR \mid u \in B\} = \{G_0^u := 0 + uR \mid u \in B\} \ .$$

Ist jetzt eine beliebige Gerade $G \in \mathfrak{g}$ vorgegeben, so gibt es wegen (A_3) eine eindeutig bestimmte Gerade

$$G_0^u \in \langle 0 \rangle \quad \text{mit} \quad G_0^u \parallel G \ .$$

Wieder mit (A_3) und mit einem beliebigen Punkt $g \in G$ können wir schreiben

$$G = (G_0^u)^{\tau(g)} = g + uR =: G_g^u \ .$$

Umgekehrt erhalten wir für beliebige Punkte $g \in \mathfrak{P}_R$ und $u \in B$

$$(G_0^u)^{\tau(g)} = g + uR = G_g^u$$

als eine zu G_0^u parallele Gerade ,

so daß wir festhalten können

$$\mathfrak{g} = \{G_a^u := a + uR \mid a \in \mathfrak{P}_R \ , \ u \in B\}$$

und $G_a^u \parallel G_b^v \iff uR \parallel vR$,

was aber wegen $uR, vR \in \langle 0 \rangle$ und (A_3)

mit $uR = vR$ gleichbedeutend ist.

Für zwei nicht-benachbarte Punkte a und b gilt bereits

$$a \not\sim b \iff a - b \in B ,$$

wobei jetzt noch zu zeigen bleibt,

daß B Barbilianbereich von $\mathcal{P}_R$ ist :

Es ist jedoch jede Generatormenge $B' \subset B$ auch eine R - Modul Generatormenge von $\mathcal{P}_R$ und wegen (2.8) auch frei, also Basis von $\mathcal{P}_R$.

Damit wird im übrigen $\mathcal{P}_R$ auch zum freien rechten R - Modul.

Die beiden Eigenschaften (B_1) und (B_2) folgen nun aber sofort aus $(\mathcal{V}_1)$ und $(\mathcal{V}_2)$,

so daß die Gültigkeit von Satz (4.1) vollständig bewiesen ist .

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß auch umgekehrt gilt

(4.2) Satz

Jede Geometrie $\mathrm{Aff}(M_R,B) = \left[M_R,\mathcal{G},\not\sim,\parallel\right]$ mit

$\mathcal{G} = \left\{G_a^u := a + uR \mid a \in M_R,\ u \in B\right\}$,

$G_a^u \parallel G_b^v \iff uR = vR$ und

$a \not\sim b \iff a - b \in B$

ist ein ADBR .

Zeigen wir die Gültigkeit von (Ψ_1) und (Ψ_2) , so wissen wir bereits, daß wir $\mathrm{Aff}(M_R,B)$ darstellen können als $\mathrm{Aff}\left[(M,+),B,\Psi\right]$ mit $\Psi(u) := \overline{Ou}$,
und somit nach Satz (3.3), daß $\mathrm{Aff}(M_R,B)$ ein ATBR ist :

(Ψ_1) folgt jedoch sofort aus (B_1) und (3.1.7) .
Ist nun zum Nachweis von (Ψ_2) $B' := \{u_i \mid u_i \in B ,\ i \in I\}$ eine Generatormenge, so gilt für jedes

$$u^* \in \left(\sum_{i \in I-\{j\}}^{\oplus} \overline{Ou_i} - u_j \right)$$

nach (B_2) $u^* \in B$,

und es bleibt zu zeigen, daß

$\{u^*\} \cup \{u_i \mid i \in I-\{j\}\}$ Generatormenge ist ,

was aber wegen

$$u^* = \sum_{i \in I-\{j\}} u_i \alpha_i - u_j \quad \text{mit } \alpha_i \in R$$

leicht nachzurechnen ist .

Abschließend soll jetzt die Gültigkeit von (A_7) gezeigt werden :

Dazu benötigen wir folgende Verallgemeinerung von (3.2.5) , deren Beweis jedoch völlig gleich verläuft und deshalb ausgelassen wird.

(4.2.1) Aus $q' - q = (p' - p)\varrho$, $\varrho \in R$
und $p', p \in a + uR =: G$
folgt $q' \in (q \parallel G)$ für alle $G \in \mathfrak{G}$.

Sind nun $p_0, p_1, \ldots, p_n$; $q_0, q_1, \ldots, q_n$
und $p_0, p_1', \ldots, p_m'$; $q_0, q_1', \ldots, q_m'$
zwei $\langle z \rangle$ - Parallelodrome mit $G_0 = \overline{p_0 z}$,
so können wir schreiben

$$q_0 = z + (p_0 - z)\varrho \quad \text{mit} \quad \varrho \in R .$$

Es soll nun durch vollständige Induktion gezeigt werden

$$q_n = z + (p_n - z)\varrho .$$

Sei deshalb $q_{j-1} = z + (p_{j-1} - z)\varrho$
und außerdem

$$p_j = p_{j-1} + \gamma_j \in (p_{j-1} \parallel H_j) = (p_{j-1} \parallel \gamma_j R) \quad \text{und}$$

$$p_j = z + \sum_{i_j \in I_j} u_{i_j} \alpha_{i_j} \in U_j = \{z\} \cup \overline{\{(z \parallel u_{i_j} R) \mid i_j \in I_j\}} ,$$

mit $u_{i_j} \in B$, $\alpha_{i_j} \in R$ für $i_j \in I_j$,

wobei $\{u_{i_j} R \mid i_j \in I_j\}$ Teilmenge einer Kreuzgeradenmenge ist.

Dann gilt für

$$x_j := z + \Big(\sum_{i_j \in I_j} u_{i_j} \alpha_{i_j}\Big) \varsigma \quad \in U_j$$

$$x_j = q_{j-1} - (p_{j-1} - z)\varsigma + \Big(\sum_{i_j \in I_j} u_{i_j} \alpha_{i_j}\Big) \varsigma =$$

$$= q_{j-1} + \Big(z + \sum_{i_j \in I_j} u_{i_j} \alpha_{i_j} - p_{j-1}\Big)\varsigma =$$

$$= q_{j-1} + (p_j - p_{j-1})\varsigma =$$

$$= q_{j-1} + v_j \mu_j \varsigma \quad \in (q_{j-1} \| H_j) \quad ,$$

also $x_j \in (q_{j-1} \| H_j) \cap U_j = \{q_j\}$,

und somit wegen $\sum_{i_j \in I_j} u_{i_j} \alpha_{i_j} = p_j - z$

schließlich $q_j = z + (p_j - z)\varsigma$.

Auf diese Weise erhalten wir

$$q_n = z + (p_n - z)\varsigma$$

und analog $q'_m = z + (p'_m - z)\varsigma$,

was aber $q_n - q'_m = (p_n - p'_m)\varsigma$ ergibt

und nun mit (4.2.1) die Gültigkeit von (A_7) zeigt.

Damit ist Satz (4.2) bewiesen, und zusammen mit Satz (4.1) erhalten wir

(4.3) Struktursatz für Affine Desarguessche Barbilianräume

Die Klasse der Affinen Desarguesschen Barbilianräume $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ stimmt bis auf Isomorphie überein mit den Strukturen $\mathrm{Aff}(M_R, B)$, R ein Ring mit Einselement, M_R ein freier rechter R - Modul und B ein Barbilianbereich von M_R.

5. Zusammenhang zwischen speziellen algebraischen und geometrischen Eigenschaften Affiner Desarguesscher Barbilianräume

In diesem letzten Paragraphen sollen spezielle algebraische Eigenschaften von $Aff(M_R,B)$ mit Hilfe von geometrischen Eigenschaften charakterisiert werden.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz

(5.1) (F. Rado') Sei $Aff(M_R,B)$ ein Affiner Desarguesscher Barbilianraum, dann sind für beliebige $u \in B$, $\gamma \in R$

(i) Es gibt ein $\gamma' \in R$ mit $\gamma'\gamma = 1$.

(ii) $u\gamma \in B$

äquivalent .

Beweis: Gibt es ein $\gamma' \in R$ mit $\gamma'\gamma = 1$, so vervollständigen wir u zu einer Basis $K \subset B$ von M_R mit $|K| \geq 2$ und wählen $v \in K-\{u\}$.

Mit (B_2) folgt nun: $v\gamma' - u$, v gehören zu einer Basis $K' \subset B$, und erneutes Anwenden von (B_2) liefert

$$(v\gamma' - u)(-\gamma) - v = u\gamma \in B .$$

Ist nun umgekehrt $u\gamma =: v_1 \in B$, so vervollständigen wir v_1 zu einer Basis $\{v_i \mid i \in I\} \subset B$ mit $1 \in I$ und erhalten über $u = \sum_{i \in I} v_i \alpha_i$ und

$$v_1 = u\gamma = \sum_{i \in I} v_i(\alpha_i \gamma) \quad , \quad \text{daß} \quad \alpha_1 \gamma = 1 .$$

Nun können wir zeigen, daß, wie bereits im ersten Paragraphen erwähnt, gilt :

(5.2) Satz

Für einen ADBR $\mathrm{Aff}(M_R,B) = [\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ sind äquivalent

(i) (A_1^*) Sind p und q zwei nicht-benachbarte Punkte, so gibt es genau eine Gerade, die p und q enthält.

(ii) R ist ein 1 - endlicher Ring, d.h. für alle $\alpha,\beta \in R$ gilt : $\alpha\cdot\beta = 1 \Leftrightarrow \beta\cdot\alpha = 1$.

Beweis: Gilt in $\mathrm{Aff}(M_R,B)$ (A_1^*) , so sei $u \in B$ und $\delta,\delta' \in R$ mit $\delta'\cdot\delta = 1$. Mit (5.1) folgt $u\delta =: v \in B$ und somit $vR \in \langle 0\rangle$, was aber mit (A_1^*) $uR = vR$ bedeutet, denn $0,v \in uR \cap vR$, $0 \not\in v$ und $uR, vR \in \mathcal{G}$. Daraus ergibt sich aber die Existenz eines $\beta \in R$, so daß $v\beta = u\cdot 1$ oder $u\delta\beta = u\cdot 1$, was aber mit (2.8) $\delta\beta = 1$ und nun über $\delta' = \delta'\delta\beta = \beta$ das Gesuchte ergibt.

Ist andererseits R ein 1 - endlicher Ring und sind a , b zwei nicht-benachbarte Punkte einer beliebigen Geraden $c + uR$, $c \in \mathcal{P}$, $u \in B$, mit $a - b =: v \in B$, dann gilt $v \in uR$. Wieder mit (5.1) folgt dann ,

daß für $v = u\gamma$, $\gamma \in R$, gilt :

γ besitzt ein Linksinverses γ' .

Somit gilt jedoch

$vR = u\gamma R \subset uR = u\gamma'\gamma R = u\gamma\gamma' R = v\gamma' R \subset vR$

oder $uR = vR$ und schließlich

$$c + uR = b + uR = b + vR = \overline{ab} \quad .$$

Da nicht jeder Ring 1-endlich ist, wie W. Leißner in [13] zeigt, sei bemerkt, daß ein Ring mit Einselement 1-endlich ist, wenn er kommutativ oder lokal oder nullteilerfrei ist.

Die noch folgenden Sätze sind sämtlich gleichlautend mit Sätzen, die für den ebenen Fall von W. Leißner in [13] bereits bewiesen wurden und deren Beweise mit leichten Veränderungen auch hier übernommen werden können.
Diese Sätze sind deshalb der Vollständigkeit halber hier noch einmal ohne Beweise zusammengefaßt :

(5.3) Satz

Für einen ADBR $Aff(M_R, B) = [P, g, \phi, \|]$ sind äquivalent :

(i) Die Relation "benachbart" (d.h. die zur Relation "nicht-benachbart" komplementäre Relation) ist transitiv .

(ii) R ist ein lokaler Ring .

Bemerkung: Ein lokaler Ring besitzt genau einen Barbilian-bereich (= B_{max}) .

(5.4) Satz

Für einen ADBR $Aff(M_R,B) = [\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ sind äquivalent :

(i) Je zwei Punkte einer Geraden sind nicht-benachbart .

(ii) Je zwei Punkte sind nicht-benachbart .

(iii) R ist ein (nicht notwendig kommutativer) Körper .

(iv) $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ ist Affiner Desarguesscher Raum .

(5.5) Satz

Für einen ADBR $Aff(M_R,B) = [\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ sind äquivalent :

(i) $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ ist linear zusammenhängend, d.h. durch zwei verschiedene Punkte geht mindestens eine Gerade .

(ii) $BR = \mathcal{P}$.

Bemerkung: Aus $BR = \mathcal{P}$ folgt $B = B_{max}$.

(5.6) Satz

Für einen ADBR $\mathrm{Aff}(M_R,B) = [\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ sind äquivalent :

(i) $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ ist linear eindeutig, d.h. durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade .

(ii) R ist nullteilerfrei .

(5.7) Satz

Für einen ADBR $\mathrm{Aff}(M_R,B) = [\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ sind äquivalent :

(i) $[\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, \|]$ ist Inzidenzstruktur, d.h. durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade .

(ii) $B = B_{max}$ und R ist Rechts-Bezoutring, d.h. R ist nullteilerfrei und jedes endlich erzeugte Linksideal ist Hauptlinksideal .

Literatur

[1] Arnold, H.J. : Die Geometrie der Ringe im Rahmen allgemeiner affiner Strukturen. Hamb. Math. Einzelschr., 4 (1971).

[2] Barbilian, D. : Zur Axiomatik der projektiven Ringgeometrien. I.,II. Jber.Deutsch. Math. Verein. 5o (194o) 179-229 und 51 (1941) 34-76.

[3] Benz, W. : Ebene Geometrie über einem Ring. Math. Nachr. 59 (1974) 163-193.

[4] Benz, W. : On Barbilian Domains over Commutative Rings. J. Geometry 12 (1979) 146-151.

[5] Cohn, P.M. : On the Structure of the GL_2 of a Ring. Publ. Math. I.H.E.S. 3o (1966) 365-413.

[6] Cohn, P.M. : Free Rings and their Relations. Academic Press, London (1971).

[7] Hjelmslev, J. : Die natürliche Geometrie. Math. Sem. Hamburg (1922).

[8] Hjelmslev, J. : Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. 1. Mitt. Danske Vid. Selsk. math.-fys. Medd. 8 (1929); 2. Mitt. 1o (1929); 3. Mitt. 19 (1942); 4. u. 5. Mitt. 22 (1945); 6. Mitt. 25 (1949).

[9] Klingenberg, W. : Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Zeitschr. 6o (1954) 384-4o6.

[1o] Klingenberg, W. : Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Zeitschr. 61 (1954) 1-25.

[11] Klingenberg, W. : Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. 2o (1955) 97-111.

[12] Klingenberg, W. : Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Math. Ann. 132 (1956) 18o–2oo.

[13] Leißner, W. : Affine Barbilian-Ebenen I,II. J. Geometry 6 (1975) 31–57, 1o5–129.

[14] Leißner, W. : Parallelodromieebenen. J. Geometry 8 (1976) 117–135.

[15] Leißner, W. : Barbilianbereiche. Beitr. z. Geometr. Algebra (1977) 219–224.

[16] Radó, F. : Affine Barbilian Structures. J. Geometry 14 (198o) 75–1o2.

Lebenslauf

Am 2o. April 1954 wurde ich als erstes Kind der Eheleute Karl Heinrich Wolf und Helga Wolf geb. Winzer in Essen geboren.
Seit dem 3o. Mai 198o bin ich verheiratet mit der Studienreferendarin Hildegard Wolf geb. Junge.

Die Grundschule besuchte ich von Ostern 1961 bis Ostern 1965 und wechselte dann zum Gymnasium Alfred-Krupp-Schule, Essen. Im Sommer 1973 machte ich dort mein Abitur.

Anschließend leistete ich ab 2. Juli 1973 meinen Grundwehrdienst bei der Bundeswehr in Düsseldorf und Essen. Ich wurde zum Gerätemechaniker für Fernmeldegeräte ausgebildet und am 3o. September 1974 als Hauptgefreiter entlassen.

Während meines Bundeswehrurlaubes besuchte ich das Mathematische und Physikalische Vorsemester an der Ruhr-Universität Bochum. Dort bin ich seit dem 1. Oktober 1974 als Student der Mathematik und Physik immatrikuliert.
Im Sommer 1976 legte ich meine Zwischenprüfung in Mathematik und Physik und zusätzlich mein Vordiplom in Physik ab.
Ich hörte u.a. Vorlesungen bei den Professoren Levin, von Wahl, Kunze, Niedermayer, Kümmel, Glöckle, Ecker, Gerritzen und Leißner.

Im Wintersemester 1979 bestand ich meine erste philologische Staatsprüfung und bin nun seit dem 1. September 198o als Studienreferendar im Vorbereitungsdienst für das Lehramt am Gymnasium in Arnsberg.

Arnsberg, den 16. März 1981

Klaus Wolf

DER DRÜCKER - (Alte) Buscheystraße 138 - 4630 Bochum-Querenburg